Н.П. Деменков

Статистическая динамика систем управления

Учебное пособие

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2017

УДК 681.5:681.3
ББК 14.2.6
Д30

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/200/book1680.html

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Системы автоматического управления»

Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор *Ю.В. Митришкин*,
канд. техн. наук, доцент *Н.А. Чулин*

Деменков, Н. П.
Д30 Статистическая динамика систем управления : учебное пособие / Н. П. Деменков. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 146, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4717-6

Изложено решение задач анализа и синтеза систем управления при случайных воздействиях на основе теории оптимального оценивания. Наряду с основными фундаментальными положениями статистической теории автоматических систем, рассмотрены инженерные методы вероятностного расчета и проектирования сложных систем. Приведено большое число примеров, в которых отражены алгоритмы и результаты расчета вероятностных характеристик систем, работающих в условиях случайных воздействий.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Управление в технических системах» и изучающих дисциплины «Статистическая динамика систем управления», «Основы теории управления». Издание будет полезным также для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов технических университетов.

УДК 681.5:681.3
ББК 14.2.6

ISBN 978-5-7038-4717-6

Предисловие

Системы автоматического управления (САУ), как правило, работают в условиях помех. В качестве примеров можно привести пневмосистемы с емкостями постоянного давления, системы регулирования частоты вращения автономных генераторов переменного тока, термоэлектростанции, различные транспортные системы, следящие системы радиотелескопов, системы телеуправления и самонаведения ракет и ряд других. В связи с этим для анализа и синтеза систем автоматического управления широко привлекаются вероятностные (статистические) методы.

Начиная с основополагающих работ А.Я. Хинчина в области теории случайных процессов и работ А.Н. Колмогорова и Н. Винера, посвященных решению проблемы фильтрации в классе линейных систем, статистическая динамика систем управления получила дальнейшее развитие в исследованиях отечественных (В.В. Гнеденко, В.С. Пугачев, В.В. Солодовников и др.) и зарубежных (Р. Бьюси, Л. Заде, Р. Калман, А.М. Пелегрен, Дж. Рагоцини и др.) ученых.

Изучение реального движения какого-либо динамического объекта управления по данным измерений означает, с одной стороны, определение для любого момента времени параметров, характеризующих реальное движение, а с другой стороны — анализ движения, т. е. выявление причин отклонения реального движения от расчетного или требуемого.

Под определением движения понимают оптимальное в принятом смысле оценивание параметров движения с использованием некоторой математической модели движения для любого момента времени на заданном интервале по измерениям, функционально связанным с параметрами движения.

Под анализом движения понимают получение оптимальных в принятом смысле оценок характеристик модели движения или самой структуры модели на заданном интервале времени по измерениям, функционально связанным с параметрами движения. Это есть задача идентификации, т. е. определение такой математической модели движения из заданного класса, которой в каком-то смысле эквивалентно реальное движение объекта.

При проектировании современных систем автоматического управления повышаются требования к качеству их работы. В реальных условиях на системы управления наряду с полезными управляющими сигналами действуют случайные возмущения. Сами полезные сигналы во многих случаях также имеют вероятностный характер. Поэтому для изучения динамики и оценки качества автоматических систем широко применяются статистические методы анализа и синтеза.

Исследование качества работы систем автоматического управления при случайных воздействиях составляет предмет статистической теории, являющейся теоретической базой для анализа эффективности существующих и оценки потенциальных качеств перспективных и проектируемых автоматических систем.

Дисциплина «Статистическая динамика систем управления» относится к числу фундаментальных. Ее предметом является изучение процессов управления динамическими объектами, находящимися под воздействием случайных возмущений, в целях привития студентам навыков, необходимых для формулировки обоснованного технического задания на проектирование сложной стохастической системы управления техническим объектом или технологическим процессом.

В настоящем издании изложены основы статистического анализа и синтеза систем автоматического управления в технических системах.

Цель пособия — дать представление о характерных особенностях стохастических систем автоматического управления и задачах, стоящих перед разработчиками и пользователями систем управления. Освоение материала даст возможность грамотно выбирать методы исследования стохастических систем управления и оценивать достоверность результатов, полученных при компьютерных расчетах.

Настоящее издание предназначено для студентов, изучающих дисциплины «Статистическая динамика систем управления», «Основы теории управления».

Предполагается, что читатели освоили классические разделы высшей математики (линейную алгебру, дифференциальное и интегральное исчисление), прямые и косвенные методы оптимизации, математическую статистику и теорию вероятности, а также основы теории управления при детерминированных воздействиях.

Издание состоит из шести глав. Первая глава посвящена анализу и синтезу систем при случайных воздействия. Во второй главе обсуждается структурный синтез систем автоматического управления с учетом условия минимума среднеквадратической ошибки. Третья глава посвящена оптимальной фильтрации в линейных нестационарных системах. В четвертой главе приведены методы оценки параметров движения летательных аппаратов по данным траекторных измерений. Пятая глава посвящена байесовским и минимаксным методам оценивания измерений. В шестой главе обсуждается анализ точности и синтез нелинейных систем.

Особенностью данного пособия является изложение, с одной стороны, фундаментальных положений статистической теории автоматических систем, а с другой — рассмотрение инженерных методов вероятностного расчета и проектирования сложных систем. В издании приведено большое число инженерных примеров, в которых отражены алгоритмы и результаты расчета вероятностных характеристик систем, работающих в условиях случайных воздействий.

Изложение примеров, результатов расчета и их анализ приводятся непосредственно за теоретическим материалом. Такой методический прием позволил экономно и стройно изложить теоретические вопросы и дать подробные инженерные приложения.

Большое число примеров поможет студентам, аспирантам и инженерам различных специальностей шире применять излагаемые в издании статистические методы анализа и синтеза систем управления.

Ограниченный объем книги позволил обозначить лишь наиболее важные традиционные и современные подходы к анализу и синтезу систем управления при случайных воздействиях. Для более углубленного изучения материала рекомендуется пользоваться дополнительной литературой.

Автор благодарит рецензентов, которые внимательно прочитали рукопись и высказали много полезных замечаний. Все они были учтены при подготовке окончательного варианта издания.

Глава 1
Анализ и синтез систем при случайных воздействиях

1.1. Преобразование случайных сигналов динамической системой во временной области

В реальных условиях действующие в системе автоматического управления (САУ) управляющий сигнал $u(t)$ и возмущения $f(t)$ являются случайными и могут быть описаны только с помощью статистических методов (рис. 1.1).

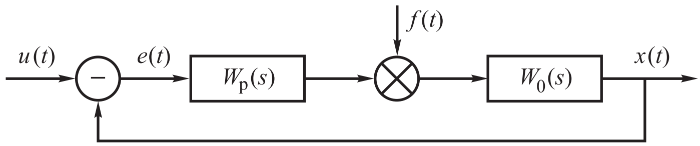

Рис. 1.1. Структурная схема САУ:
$W_р(s)$, $W_0(s)$ — передаточная функция регулятора и объекта соответственно

Для случайных воздействий ошибка воспроизведения $e(t) = u(t) - x(t)$ является так же случайной функцией. Поэтому можно говорить об определении не мгновенных, а только средних значений ошибки.

Обычно качество работы динамической системы при случайных стационарных воздействиях характеризуется среднеквадратической ошибкой, т. е. квадратным корнем из величины

$$\overline{e}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^2(t)dt,$$

которую называют средним значением квадрата ошибки.

Под *случайным*, или *стохастическим*, процессом понимают множество случайных величин $X(t)$, зависящих от времени.

Рассмотрим большое число одинаковых систем, находящихся в одинаковых условиях (рис. 1.2).

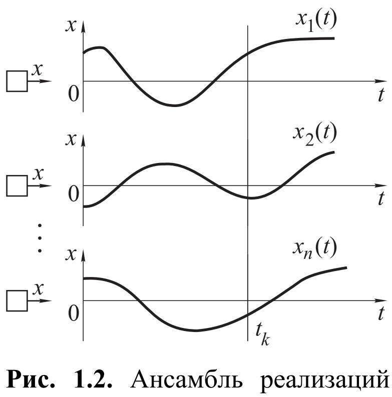

Рис. 1.2. Ансамбль реализаций случайной функции

При отсутствии задающей переменной $g(k) \equiv 0$, $e(k) = -x(k)$ и алгоритм управления описывается уравнением

$$u(k) = -k_0 x(k) - k_1 x(k-1),$$

а аддитивный шум квантования — уравнением

$$u_\delta(k) = -k_0 \delta(k) - k_1 \delta(k-1).$$

Если помеха фильтруется низкочастотным объектом, то в результате фильтрации $x_\delta(k) \approx 0$. Дисперсию $\sigma_{u\delta}$ управляющей переменной $u_\delta(k)$, представляющей процесс со скользящим средним, можно определить по приближенной формуле

$$\sigma_{u\delta}^2 \approx [k_0^2 + k_1^2]\sigma_\delta^2 = [k_0^2 + k_1^2]\frac{q^2}{12}.$$

Задав параметры регулятора $k_0 = 3$, $k_1 = -1{,}5$ и учитывая (1.24), получим следующие значения СКО управляющего сигнала и ошибки квантования:

$$\sigma_{u\delta}^2 \approx 3{,}35; \quad \sigma_\delta \approx \frac{3{,}35}{\sqrt{12}} q \approx 0{,}97q.$$

При наличии шума квантования в АЦП среднеквадратическое значение управляющей переменной более чем в 3 раза превосходит ошибку квантования.

Учитывая, что при усечении математическое ожидание ошибки квантования отлично от нуля, более целесообразно использовать округление.

Таким образом, в цифровых системах:

1) разрядности слов в АЦП и ЦАП, а также диапазон чисел, представимых в МП, должны быть достаточно велики и соответствовать друг другу;

2) разрядность АЦП следует выбирать таким образом, чтобы погрешность квантования была меньше статической и динамической ошибок датчиков. При выборе 10 двоичных разрядов относительная погрешность $\delta \approx 0{,}1$ %;

3) разрядность ЦАП должна быть согласована с разрядностью АЦП. Целесообразно задавать ее такой, чтобы изменение управляющей переменной на один шаг квантования вызывало (после прохождения через непрерывную часть системы) изменение кода в АЦП на единицу младшего разряда.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой случайный процесс называют стационарным?
2. Что такое эргодичность? Что она дает для решения задач?
3. Как экспериментально определить математическое ожидание на выходе линейной динамической системы?
4. Как экспериментально определить корреляционную функцию?
5. Перечислите свойства спектральной плотности.
6. Что такое формирующий фильтр?

7. Как выполняют факторизацию спектральной плотности?

8. Как оценить спектральную плотность на выходе линейной динамической системы?

9. Чем различаются динамическая и случайная ошибки системы?

10. Как оценить дисперсию на выходе линейной динамической системы?

11. Как проводят параметрический синтез САУ из условия минимума среднеквадратической ошибки?

12. Почему в непрерывно-дискретной системе приходится учитывать возмущения, которые не влияют на точность в непрерывной системе?

13. С какой целью выполняют статистический учет квантования по уровню в цифровых системах?

Глава 2
Структурный синтез САУ из условия минимума среднеквадратической ошибки

2.1. Постановка задачи структурного синтеза САУ

При реализации оптимальных в статистическом смысле значений параметров в системе с заданной структурой не всегда достигается желаемое (допустимое) среднеквадратическое значение рассогласования. Значительно лучшие результаты могут быть получены при оптимальной структуре системы — оптимальной передаточной функции.

Впервые задача синтеза оптимальных структур и их параметров, обеспечивающих наименьшую среднеквадратическую ошибку, была решена А.Н. Колмогоровым для интерполяции и экстраполяции стационарных случайных последовательностей. Затем Н. Винер обобщил эти результаты на непрерывные случайные процессы и дал решение задачи определения оптимальной передаточной функции САУ.

Пусть на вход САУ действует аддитивная смесь $z(t)$ полезного случайного сигнала $y(t)$ и помехи $v(t)$ с нулевыми средними значениями $z(t) = y(t) + v(t)$ при $M[y(t)] = M[v(t)] = 0$. Полезный сигнал и помеха являются стационарными в широком смысле. Задан оператор желаемого преобразования B такой, что $h(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием $M[h(t)] = 0$ (рис. 2.1).

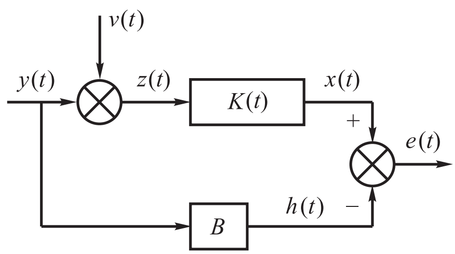

Рис. 2.1. К постановке задачи структурного синтеза

Импульсная переходная функция системы удовлетворяет условию асимптотической устойчивости: $\int_0^{\infty} K(t)dt < \infty$. Тогда и $x(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)z(t-\tau)d\tau$ будет также стационарным случайным процессом с нулевым математическим ожиданием

$$M[x(t)] = \int_0^{\infty} K(\tau)M[z(t-\tau)]d\tau = \int_0^{\infty} K(\tau)\{M[y(t-\tau)] + M[v(t-\tau)]\}d\tau = 0.$$

то среднеквадратическую ошибку можно записать в виде

$$M\left[e^2(k)\right] = M\left\{e(k)\left[x(k) - H_{\text{орт}}Y(k)\right]\right\} =$$

$$= M\left[x^2(k)\right] - H_{\text{опт}}M\left[x(k)Y(k)\right] = M\left[x^2(k)\right] - H_{\text{орт}}R_{xz};$$

$$M\left[e^2(k)\right] = M\left[e(k)x(k)\right].$$

Подставив значения R_{xz} и $H_{\text{орт}}$, получим формулу для остаточной среднеквадратической ошибки:

$$M\left[e^2(k)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\sigma_v^2)} = \frac{\sigma_v^2}{2(1+\sigma_v^2)}.$$

При $\sigma_v^2 = 0$ среднеквадратическая ошибка равна нулю, а при отношении сигнал — шум, равном 0 дБ (т. е. $\sigma_v^2 = 1/2$), конечная среднеквадратическая ошибка равна 1/6 (значение ошибки до процесса оценивания была равна 1/2).

Увеличение порядка $H_{\text{орт}}$ (т. е. использование оценивающего фильтра с большим временным интервалом обработки сигнала) приводит к соответствующему уменьшению оптимальной остаточной среднеквадратической ошибки. Пример приведен лишь для того, чтобы показать, какую обработку данных необходимо выполнить для реализации винеровского устройства оценки. При использовании более высоких порядков $H_{\text{орт}}$ можно получить лучшие оценки, однако для этого требуется гораздо больший объем вычислений.

Контрольные вопросы и задания

1. Поставьте задачу структурного синтеза САУ.
2. Напишите уравнение фильтра Винера для одномерных стационарных систем.
3. Напишите уравнение фильтра Винера для многомерных стационарных систем.
4. Почему необходимые условия оптимальности в фильтре Винера являются и достаточными?
5. Напишите уравнение фильтра Винера для дискретных систем.
6. При каких условиях фильтр Винера можно трактовать как частный случай фильтра Калмана?

Глава 3
Оптимальная фильтрация в линейных нестационарных системах

3.1. Фильтр Калмана — Бьюси для непрерывных систем

Рассмотрим задачу оптимальной фильтрации для линейной непрерывной системы управления, описываемой уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{w}(t); \tag{3.1}$$

$$\mathbf{z}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x}(t)$ — n-мерный вектор состояния; $\mathbf{z}(t)$ — m-мерный вектор наблюдения; $\mathbf{w}(t)$ — n-мерный вектор возмущения (порождающий шум) на входе, представляющий собой случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $K_w(\tau,t) = Q(\tau)\delta(\tau - t)$; $\mathbf{v}(t)$ — m-мерный вектор шумов измерений — случайный процесс типа белого шума с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $K_v(\tau,t) = R_v(\tau)\delta(\tau - t)$; $A(t)$ — матрица состояния системы; $F(t)$ — матрица входа возмущения; $C(t)$ — матрица наблюдения (измерения) системы.

Помеха на входе $\mathbf{w}(t)$ и шум измерений $\mathbf{v}(t)$ полагаются некоррелированными:

$$M\left[\mathbf{w}(\tau)\mathbf{v}^{\mathrm{т}}(t)\right] = 0 \quad \forall\, \tau, t.$$

Начальное состояние $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ представляет собой n-мерную векторную случайную величину с заданным математическим ожиданием $\mathbf{m}_{\mathbf{x}_0}$ и матрицей дисперсий $D_{\mathbf{x}_0}$. Начальное состояние $\mathbf{x}_0$ и процессы $\mathbf{w}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ полагаются некоррелированными, т. е.

$$M\left[\mathbf{x}_0\mathbf{w}^{\mathrm{т}}(t)\right] = 0 \quad \text{и} \quad M\left[\mathbf{x}_0\mathbf{v}^{\mathrm{т}}(t)\right] = 0 \quad \text{для} \quad t \geq t_0.$$

Линейную оптимальную оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ вектора $\mathbf{x}(t)$ будем искать в виде

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{m}_{\mathbf{x}} + \int\limits_{t_0}^{t} L(t,\lambda)\mathbf{z}(\lambda)d\lambda, \tag{3.3}$$

где $L(t,\lambda)$ — матрица перехода или весовая матрица системы (3.1).

Контрольные вопросы и задания

1. Напишите уравнение линейного фильтра Калмана — Бьюси для непрерывных систем.
2. Какова точность фильтра Калмана и от чего она зависит?
3. Сходится ли фильтр Калмана при неточном задании начального вектора состояния и за какое время?
4. Напишите уравнение линейного фильтра Калмана — Бьюси для дискретных систем.
5. Как влияет наличие детерминированного сигнала на структуру фильтра Калмана — Бьюси?
6. Как учитываются цветные шумы в фильтре Калмана?
7. Что такое обновляющий процесс в фильтре Калмана?
8. Как можно использовать обновляющий процесс фильтрации для создания адаптивного фильтра?
9. Каковы особенности адаптивного фильтра Мехра?

Глава 4
Методы оценки параметров движения летательных аппаратов по данным траекторных измерений

4.1. Несмещенность, состоятельность и эффективность оценки измерений

При создании модели движения по результатам наблюдений измеряемой характеристики y_i требуется найти число, близкое к неизвестному значению параметра движения θ_j, т. е. найти оценку этого параметра. Очевидно, что любая оценка $\hat{\theta}_j$ необязательно будет близкой к оцениваемому параметру θ_j. Близость оценки к соответствующему параметру обеспечивается двумя ее свойствами — несмещенностью оценки и ее состоятельностью.

Оценку $\hat{\theta}$ параметра θ называют *несмещенной*, если математическое ожидание $M[\hat{\theta}] = \theta$. Свойство несмещенности означает, что оценка не имеет систематической ошибки.

Оценку $\hat{\theta}$ параметра θ называют *состоятельной*, если при увеличении числа измерений N ($N \to \infty$) вероятность того, что разность между истинным значением параметра θ и его оценкой $\hat{\theta}$ меньше любого наперед заданного числа ε, стремится к единице:

$$P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} \to 1 \;\; \forall\, \varepsilon > 0.$$

Свойство состоятельности обеспечивает сближение оценки с измеряемым параметром при увеличении числа измерений.

Оценку $\hat{\theta}$ параметра θ называют *эффективной*, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра.

Рассмотрим задачу оценки скалярной величины y, основанную на N искаженных шумами измерениях z_k:

$$z_k = y + v_k, \; k = 1, 2, \ldots, N,$$

которые являются смесью полезного сигнала y (измеряемой характеристики) и белого шума v_k.

$$= -\frac{n\overline{X}}{\overline{X}^2} - \frac{n - n\overline{X}}{(1-\overline{X})^2} = -\frac{n}{\overline{X}} - \frac{n}{1-\overline{X}} = -\frac{n}{\overline{X}(1-\overline{X})} < 0.$$

Таким образом, при $p = \overline{X}$ функция правдоподобия достигает максимума.

Пример 4.8. Требуется вычислить оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$ равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$.

Функция правдоподобия выборки равна

$$W(X_1, ..., X_n / \theta) = \begin{cases} \theta^{-n}, \text{если все } X_j \in [0,\theta]; \\ 0, \quad \text{если хотя бы одно } X_j \notin [0,\theta] \end{cases} = \begin{cases} \theta^{-n}, \text{если } X_{(n)} \le \theta; \\ 0, \quad \text{если } X_{(n)} > \theta, \end{cases}$$

где $X_{(n)}$ — максимальная порядковая статистика.

При фиксированных значениях выборки (и, следовательно, при фиксированном значении $X_{(n)}$) зависимость $W(X_1, ..., X_n / \theta)$ от θ показана на рис. 4.1.

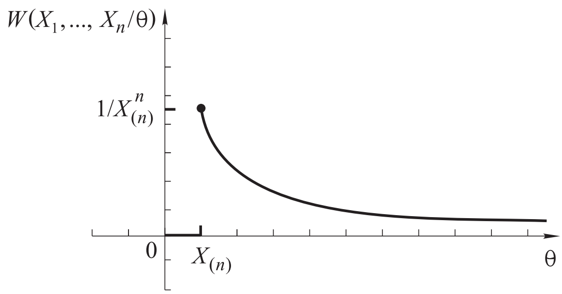

Рис. 4.1. Функция правдоподобия

Максимум функции правдоподобия достигается в точке $\theta = X_{(n)}$. Поэтому искомая оценка максимального правдоподобия есть $\hat{\theta} = X_{(n)}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что означает несмещенность оценки параметра измерений?
2. Что означает состоятельность оценки параметра измерений?
3. Что означает эффективность оценки параметра измерений?
4. Напишите уравнение оценки параметров по методу наименьших квадратов.
5. Составьте рекуррентный алгоритм оценки параметров методом наименьших квадратов.
6. Напишите уравнение оценки параметров по методу максимального правдоподобия.
7. В чем отличия оценки параметров по методу максимального правдоподобия от оценки по методу наименьших квадратов?

Глава 5
Байесовские и минимаксные методы оценивания

5.1. Элементы теории статистических решений

Все многообразие статистических методов, их взаимосвязь и оптимальные свойства рассматриваются в теории статистических решений, разработанной венгерским ученым Абрахамом Вальдом в 40-х годах XX в. Эта теория объединила все статистические методы теории оценивания, теории испытания гипотез и методы последовательного анализа.

Во время Второй мировой войны командование американских и британских ВВС поручило А. Вальду выяснить, какие части фюзеляжа самолета нужно защитить дополнительной броней. Вальд изучал самолеты, возвращавшиеся с боевых вылетов, отмечая места попаданий. В результате он рекомендовал установить дополнительную защиту на те участки (центральную и заднюю части фюзеляжа), где число пробоин было минимальным. Рекомендация была основана на выводе, что защищать нужно от тех попаданий, которых Вальд не видел, — самолеты, которые их получили, не возвращались.

Сформулируем задачу оценивания параметров в терминах теории статистических решений.

Пусть на интервале $[0, T]$ в дискретные моменты времени ($i = 1, \ldots, N$) измеряется вектор-функция $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})$, зависящая от времени и r-мерного вектора оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}$. По принятой выборке $\mathbf{z} = \left[\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{z}_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, являющейся смесью функции $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t})$ и вектора ошибок $\mathbf{v} = \left[\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \mathbf{v}_N^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{t}) + \mathbf{v},$$

необходимо найти оптимальный в каком-то смысле вектор оценок $\boldsymbol{\theta}$.

Если $P(\boldsymbol{\theta})$ — плотность вероятности вектора $\boldsymbol{\theta}$ в r-мерном пространстве $\Omega(\boldsymbol{\theta})$ оцениваемых параметров, то $P(\boldsymbol{\theta})d\Omega(\boldsymbol{\theta})$ — вероятность попадания конца вектора $\boldsymbol{\theta}$ в бесконечно малый объем $d\Omega(\boldsymbol{\theta})$, который можно представить в виде многомерного параллелепипеда. Построенное таким же образом пространство векторов $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ назовем пространством решений $\chi(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$, которое является пространством выходов решающего устройства. Пространство входов, состоящее в данном случае из m N-мерных векторов $\mathbf{z}$ и обозначенное через $\Sigma(\mathbf{z})$, назовем пространством выборок. Роль решающего устройства или алгоритма решения сводится к тому, чтобы оптимальным образом преобразовать пространство входов в пространство решений.

и $(r+n)$-мерную вектор-функцию $H_{\text{р}}(t)$, получим статическую зависимость для измеряемой функции

$$\mathbf{y}(t) = H_{\text{р}}^{\text{т}}(t)\boldsymbol{\theta}_{\text{р}}. \tag{5.46}$$

Отсюда видно, что параметры линейной динамической модели можно оценивать, как и раньше, например, по методу наименьших квадратов. Однако следует иметь в виду, что получение зависимости (5.46) связано с необходимостью решения системы дифференциальных уравнений (5.45). Кроме того, вектор оцениваемых параметров $\boldsymbol{\theta}_{\text{р}}$ в данном случае включает в себя начальные условия процесса, которые не входили в него при рассмотрении статической модели.

Контрольные вопросы и задания

1. Что означает функция потерь?
2. Чем отличается условный риск от среднего риска?
3. С какой целью вводят правило решения?
4. Какое решение называют байесовским?
5. Как найти апостериорную плотность распределения вероятности?
6. Сформулируйте задачу оценки параметров методом максимальной апостериорной вероятности.
7. В чем состоит особенность метода условного математического ожидания?
8. Можно ли учитывать при применении метода условного математического ожидания информацию нестатистического характера?
9. В каких случаях предпочтительно использовать минимаксный метод оценивания параметров?
10. Как оценивают параметры динамической модели?

Глава 6
Анализ точности и синтез нелинейных систем

6.1. Метод статистической линеаризации

В практике расчета нелинейных систем при случайных воздействиях наибольшее распространение получил приближенный метод замены нелинейных характеристик эквивалентными в вероятностном смысле, называемый методом статистической линеаризации по аналогии с методом гармонической линеаризации для детерминированных систем. Этот метод был разработан в 1954 г. одновременно И.Е. Казаковым и Р. Бутоном.

Идеи статистической линеаризации играют значительную роль в теории оптимальных систем, поскольку статистическая линеаризация открывает большие возможности для теоретического и численного анализа нелинейных систем. Статистическая линеаризация позволяет свести рассмотрение нелинейных систем весьма общего вида к анализу линейных систем, обладающих рядом специальных свойств, делающих их уже значительно более удобными для решения задач синтеза.

В то же время статистическая линеаризация основывается на некоторых гипотезах, априорная проверка которых крайне затруднительна, поэтому этот метод нельзя считать вполне строгим. Тем не менее с помощью этого метода удалось решить целый ряд важных технических задач. Полученная при этом точность решения оказалась вполне приемлемой для технических расчетов.

Возможны различные критерии статистической эквивалентности, которые могут быть положены в основу метода статистической линеаризации. В тех случаях, когда линеаризуют безынерционный нелинейный элемент, у которого нелинейная зависимость между входным $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами имеет вид

$$y = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — статическая характеристика нелинейного элемента, применяют следующие два критерия:

1) критерий равенства математического ожидания и дисперсии случайного процесса на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного элемента;

2) критерий минимума математического ожидания квадрата разности случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного элемента.

$\sum\limits_{m=1}^{q} F_{\text{дат}} \Delta z_m$, т. е. число исправных датчиков (в соответствии с принятым критерием отказа).

Если характеристики датчиков линейны $h_{\text{дат}}(x) = x$, то алгоритм еще более упрощается:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, t) + \frac{P}{R_{\text{дат}}} \sum_{m=1}^{q} F_{\text{дат}} (z_m - \hat{x});$$

$$\dot{P} = 2P \frac{\partial f(\hat{x}, u, t)}{\partial \hat{x}} - \frac{P^2}{R_{\text{дат}}} \chi_{\Sigma\text{дат}} + Q.$$

Для линейного стационарного случайного процесса $\dot{x} = ax + bu$, где $a, b = \text{const}$, ковариационное уравнение примет вид

$$\dot{P} = 2aP - \frac{P^2}{R_{\text{дат}}} \chi_{\Sigma\text{дат}} + Q.$$

При неизменном числе исправных датчиков $\chi_{\Sigma\text{дат}}$ это скалярное уравнение Рикатти интегрируется в общем виде.

Для установившегося режима $(\dot{P} = 0)$:

$$P_{\text{ст}} = \frac{R_{\text{дат}}}{\chi_{\Sigma\text{дат}}} \left(a + \sqrt{a^2 + \frac{\chi_{\Sigma\text{дат}} Q}{R_{\text{дат}}}} \right).$$

Если параметр $a = 0$, то

$$P_{\text{ст}} = \sqrt{R_{\text{дат}} Q / \chi_{\Sigma\text{дат}}}.$$

Если параметр $a > 0$, $Q = 0$, то

$$P_{\text{ст}} = \frac{2aR_{\text{дат}}}{\chi_{\Sigma\text{дат}}}.$$

Существование устойчивого установившегося режима для случая отсутствия шумов, возбуждающих оцениваемый процесс, может показаться парадоксальным. Однако нужно учитывать, что при $a > 0$ оцениваемый процесс имеет расходящийся характер (неустойчив). Данный фильтр остается работоспособным даже при отказах датчика.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается метод статистической линеаризации?
2. Какие критерии используются для статистической эквивалентности статической нелинейности?
3. В чем отличие статистической линеаризации от обычной линеаризации?

4. В чем суть метода стохастической аппроксимации?

5. В каком случае метод стохастической аппроксимации обеспечивает состоятельность оценок?

6. Составьте структуру обобщенного фильтра Калмана.

7. В чем состоят трудности практического применения обобщенного фильтра Калмана?

8. Как можно обеспечить возможность автоматического диагностирования отказов датчиков?

Заключение

Одна из основных задач, с которой приходится сталкиваться специалистам по теории автоматического управления, заключается в том, чтобы наилучшим образом извлечь из наблюдений данные, необходимые для принятия решения о выборе того или иного управления.

В настоящем издании дано описание математических процедур нахождения оптимальных решений при случайных воздействиях на системы автоматического управления. Эти процедуры часто называют оценкой.

При использовании методов теории оценивания задача анализа и синтеза систем управления формулируется математически на языке теории вероятностей и случайных процессов.

На основании уравнения Винера — Хопфа определяется линейная оптимальная оценка. Развитием задачи фильтрации Винера является решение задачи о последовательной линейной оценке с минимальной дисперсией ошибки, данное Калманом, Бьюси и др.

Для случая, когда априорные данные о полезном сигнале и шуме полностью отсутствуют, применяют оценки по методу наименьших квадратов. При недостатке априорной информации об оцениваемых параметрах используются оценки по методу максимального правдоподобия. При наличии априорной информации об оцениваемых параметрах применяется байесовская теория оценивания, которая рассматривается как логическая интерпретация байесовской теории решений.

Статистическая линеаризация сводит рассмотрение нелинейных систем к анализу линейных систем, обладающих рядом специальных свойств, делающих их уже значительно более удобными для решения задач синтеза. При применении стохастической аппроксимации новое значение оценки представляет собой поправку к уже имеющейся оценке, основанной на новом наблюдении. Обобщенный алгоритм нелинейной фильтрации получается в результате линеаризации нелинейных моделей объектов и измерений и применения теории линейной фильтрации.

Полученные студентом знания, умения и навыки помогут ему сформулировать обоснованное техническое задание на проектирование системы управления техническим объектом или технологическим процессом при случайных воздействиях.

Литература

Деменков Н.П., *Васильев Г.Н.* Управление техническими системами: учебник. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.

Дорф Р., *Бишоп Р.* Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

Иванов В.А., *Медведев В.С.* Математические основы теории оптимального и логического управления: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник : в 5 т. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

Сборник лабораторных работ по курсу «Управление в технических системах»: метод. указания / под ред. К.А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.

Шахтарин Б.И. Фильтры Винера и Калмана: учеб. пособие. М.: Изд-во «Гелиос АРВ», 2008.

Электронные ресурсы

Сайт кафедры ИУ-1. http://iu1.bmstu.ru/materials/

Сайт библиотеки МГТУ им. Н.Э. Баумана. http://library.bmstu.ru/

Оглавление

Учебное издание

Деменков Николай Петрович

Статистическая динамика систем управления

Редактор *С.А. Серебрякова*
Художник *Э.Ш. Мурадова*
Корректор *Н.В. Савельева*
Компьютерная графика *М.В. Пинегиной*
Компьютерная верстка *Н.Ф. Бердавцевой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 30.05.2017. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 12,025. Тираж 100 экз. Изд. № 232-2016. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com