Комплекс учебников удостоен
Премии Правительства Российской Федерации
в области науки и техники за 2003 год

МАТЕМАТИКА В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Выпуск 3

Комплекс учебников
«Математика в техническом университете»
из 21 выпуска

1. Введение в анализ
2. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
3. Аналитическая геометрия
4. Линейная алгебра
5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
6. Интегральное исчисление функций одного переменного
7. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
8. Дифференциальные уравнения
9. Ряды
10. Теория функций комплексного переменного
11. Интегральные преобразования и операционное исчисление
12. Дифференциальные уравнения математической физики
13. Приближенные методы математической физики
14. Методы оптимизации
15. Вариационное исчисление и оптимальное управление
16. Теория вероятностей
17. Математическая статистика
18. Случайные процессы
19. Дискретная математика
20. Исследование операций
21. Математическое моделирование в технике

А.Н. КАНАТНИКОВ, А.П. КРИЩЕНКО

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших технических учебных заведений

7-е издание

BAUMANPRESS
Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2017

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.151.5
К19

Рецензенты:
профессор В. И. Елкин, профессор Е. В. Шикин

Канатников, А. Н.

К19 Аналитическая геометрия : учебник для вузов / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 7-е изд. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. — 387, [5] с. : ил. — (Математика в техническом университете ; вып. 3).

ISBN 978-5-7038-3845-7
ISBN 978-5-7038-4632-2 (вып. 3)

Книга является третьим выпуском серии «Математика в техническом университете» и знакомит читателя с основными понятиями векторной алгебры и ее приложений, теории матриц и определителей, систем линейных алгебраических уравнений, кривых и поверхностей второго порядка. Материал изложен в объеме, необходимом на начальном этапе подготовки студента технического университета.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который читается в МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям и аспирантам.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.151.5

ISBN 978-5-7038-4632-2 (вып. 3)
ISBN 978-5-7038-3845-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — третий выпуск комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Ее содержание выходит за рамки аналитической геометрии и отражает тот курс, который стал уже традиционным во многих вузах технической ориентации. В этом курсе можно выделить три раздела: векторную алгебру, аналитическую геометрию и теорию матриц и систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Векторная алгебра, составляющая первую часть книги (главы 1, 2), тесно переплетается с элементарной геометрией и представляет собой, по существу, современный язык той части геометрии, которая связана с понятиями параллельных прямых и подобия. Мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с такими терминами, как точка, прямая, плоскость и знает их свойства (в частности, признаки параллельности прямых, признаки равенства и подобия треугольников, признаки параллелограмма и т.д.).

Аналитическая геометрия, основным методом которой является метод координат, составляет вторую часть книги. Понятие системы координат, так же как и многие факты аналитической геометрии, известно любому начинающему студенту со школьной скамьи. Изучение этого раздела геометрии в техническом вузе отличается бо́льшей строгостью и систематичностью. В книге изложение аналитической геометрии, в частности введение декартовой системы координат, опирается на векторную алгебру. Ей посвящены главы 3 — 5. Основное внимание уделено теории прямых и плоскостей, а также кривых и поверхностей второго порядка (главы 11 и 12).

Третья часть книги посвящена основам матричной алгебры (главы 6 — 8) и системам линейных алгебраических уравнений (главы 9 и 10).

При отборе и изложении материала авторы стремились предусмотреть возможные различия в объеме его изучения. Сложные и второстепенные вопросы, обычно не входящие в программу, даны в виде дополнений в конце соответствующей главы.

Книга, как и другие выпуски комплекса учебников, имеет развитый аппарат для поиска нужной информации, позволяющий использовать книгу как справочник. Ключевые понятия, которые должны быть известны читателю, в тексте книги выделены *курсивом*. Любой определяемый термин в тексте выделен ***полужирным курсивом***, а номер страницы указан в предметном указателе, который находится в конце книги. Термины в предметном указателе даны в алфавитном порядке по существительному в именительном падеже. Ссылки предметного указателя разделяются на основные (даны в прямом начертании) и неосновные (даны курсивом), которые указывают на дополнительные сведения о термине. Ссылки на термины, введенные в других выпусках комплекса, содержат номера этих выпусков. Например, I-215 означает страницу 215 первого выпуска, а II — второй выпуск (соответствующее место в этом выпуске можно найти по его предметному указателю).

В тексте также имеются ссылки, облегчающие поиск нужных определений и других сведений. Такие ссылки могут относиться как к данной книге, так и к другим выпускам комплекса учебников. Например, (см. **1.2**) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы этой книги, тогда как [I-7.5] означает ссылку на пятый параграф седьмой главы в первом выпуске. Определения, теоремы, замечания, формулы и т.п. имеют двойную нумерацию. Например, теорема 2.1 — это первая теорема в главе 2, (2.1) — первая формула в главе 2, рис. 1.5 — пятый рисунок в главе 1.

Большинство используемых обозначений помещены в перечне основных обозначений. В нем наряду с их краткой расшифровкой даны ссылки на разделы этого или других выпусков серии, в которых вводится обозначение. Приведены также написание и русское произношение букв латинского и греческого алфавитов.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить несколько несложных заданий. В тексте каждого задания **прямым полужирным шрифтом** выделены ключевые термины, значение которых должно быть известно читателю, а в конце указан выпуск комплекса, в котором можно справиться об этих терминах при помощи предметного указателя выпуска.

Задания для самопроверки

1. Является ли **множество** $\mathbb{R}$ **действительных чисел упорядоченным** и образуют ли **натуральные числа** его **подмножество**? Что такое **абсолютное значение** (**модуль**) числа? [I]

2. Имеют ли операции сложения и умножения действительных чисел свойства **коммутативности**, **ассоциативности** и в чем состоит их свойство **дистрибутивности**? [I]

3. В чем выражается свойство **антикоммутативности** некоторой **бинарной операции**? [I]

4. Что понимают под **критерием** некоторого утверждения? [I]

5. Из каких этапов состоит доказательство по **методу математической индукции**? [I]

6. Что такое **функция**, **алгоритм** и **рекуррентное соотношение**? Приведите примеры функций, заданных с помощью рекуррентных соотношений. [I]

7. Укажите **область определения** (**существования**) и **область значений** и постройте **графики однозначных ветвей многозначной функции** $y^2 = x$. [I]

8. Проверьте, является ли функция $y = x\sin x$: а) **четной**; б) **нечетной**. [I]

9. Сформулируйте определение **взаимно однозначного отображения** двух множеств. [I]

10. Какие свойства имеют функции, **непрерывные на отрезке**? [I]

11. Что такое **вертикальные** и **наклонные асимптоты** графика функции и как их находят? [II]

12. На каких **интервалах** функция $y = x + 1/x$ является **возрастающей** (**убывающей**)? [II]

13. Сформулируйте достаточное условие **выпуклости вверх** графика функции $y = f(x)$. [II]

14. Как вычисляется **производная сложной функции** $y = f\big(g(x)\big)$? [II]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶ — начало и окончание доказательства

\# — окончание примера, замечания

$a \in A$, $A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) **I-1.1**

$A \subset B$, $B \supset A$ — подмножество A включено в множество B (B включает A) **I-1.2**

$A \subseteq B$, $B \supseteq A$ — подмножество A включено в множество B или совпадает с ним **I-1.2**

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел **I-1.3**

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел **I-1.3**

AB — отрезок, соединяющий точки A и B **1.1**

$|AB|$ — длина отрезка AB **1.1**

$\overrightarrow{AB}, \overline{AB}$ — геометрический вектор с началом в точке A и концом в точке B **1.1**

$|\overrightarrow{AB}|, |\overline{AB}|$ — длина геометрического вектора **1.1**

$\boldsymbol{a}, |\boldsymbol{a}|$ — вектор и его длина **1.1, 1.2**

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор **1.1**

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ — сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **1.3**

$\lambda\boldsymbol{a}$ — произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ **1.3**

$\text{пр}_{\boldsymbol{l}}\, \boldsymbol{a}$ — ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{l}$ **1.4**

$\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **1.4**

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $L_1 \perp L_2$ — вектор $\boldsymbol{a}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{b}$, прямая L_1 перпендикулярна прямой L_2 **4.1**

$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$, $L_1 \parallel L_2$ — вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}$, прямая L_1 параллельна прямой L_2 **4.3**

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n$ **I-2.6**

$\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{a}_k$ — линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_m$ **1.5**

$\boldsymbol{a} = \{x; y\}$ ($\boldsymbol{a} = \{x; y; z\}$) — задание вектора $\boldsymbol{a}$ из V_2 (V_3) с помощью его координат в фиксированном базисе в V_2 (V_3) **1.5**

V_1 (V_2 и V_3) — пространство коллинеарных векторов (компланарных векторов и всех свободных векторов) **1.6**

$\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$) — ортонормированный базис в V_1 (правый ортонормированный базис в V_2 и V_3) **1.6**

$\boldsymbol{ab}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **2.2**

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **2.3**

$\boldsymbol{abc}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ **2.4**

Oxy, $O\boldsymbol{ij}$ (Oxyz, $O\boldsymbol{ijk}$) — правая прямоугольная система координат на плоскости (в пространстве) **3.1**

$M(x; y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината) **3.1**

$M(x; y; z)$ — точка M пространства с координатами x (абсцисса), y (ордината) и z (аппликата) **3.1**

ρ и φ — полярные координаты (полярные радиус и угол) точки на плоскости **3.6**

$|x|$ — абсолютное значение числа x **I-1.3**

$A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует B (B — необходимое условие для A, а A — достаточное условие для B) **I-1.5**

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны **I-1.5**

E, I — единичная матрица **6.1**

Θ — нулевая матрица **6.1**

$A^{\mathrm{т}}$ — матрица, транспонированная к A **6.3**

$\det A$ — определитель матрицы A **7.1**

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A **8.1**

$\operatorname{Rg} A$ — ранг матрицы A **8.4**

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ — система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) **9.2**

$(A\,|\,\boldsymbol{b})$ — расширенная матрица СЛАУ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ **9.3**

$y = f(x)$ — переменное y — функция переменного x **I-2.1**

$f(a)$, $f(x)\big|_{x=a}$ — значение функции $f(x)$ в точке a **I-2.1**

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$ **I-2.3**, **I-11.1**

$\prod\limits_{m=1}^{n} a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ **I-2.6**

$k = \overline{1,n}$ — число k принимает последовательно целые значения от 1 до n включительно **I-2.6**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произно-шение	Начертание	Произно-шение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начер-тание	Произно-шение	Начер-тание	Произно-шение	Начер-тание	Произно-шение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K $\varkappa$	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
H η	эта	O o	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1.1. Векторные и скалярные величины

В прикладных науках оперируют величинами различного характера. В качестве примера обратимся к величинам, встречающимся в физике и механике. Такие величины, как массу и объем, характеризуют количественным значением, которое по отношению к некоторому эталону (единице измерения) задают действительным числом. Поэтому их называют ***скалярными***. Напротив, скорость, ускорение, сила характеризуются не только количественным значением, но и направлением. Их называют ***векторными величинами***.

Скалярные и векторные величины не исчерпывают всех возможных вариантов. Например, свойства кристаллических тел передавать теплоту и деформироваться под действием нагрузки не удается описать при помощи скалярных и векторных величин. Для таких свойств в физике и механике используют более сложные тензорные величины.

Перейдем к строгим определениям и понятиям.

Определение 1.1. ***Геометрическим вектором*** (также ***направленным отрезком***) называют любой отрезок, на котором выбрано одно из двух возможных направлений (рис. 1.1).

Любой отрезок однозначно определяется своими концами, поэтому одно из двух возможных направлений для данного отрезка можно задать, указав порядок концов, т.е. от какого конца отрезка надо начать движение в заданном направлении, для того чтобы, двигаясь по отрезку, попасть в его другой

2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

2.1. Определители второго и третьего порядков

В этой главе приведены начальные сведения об определителях второго и третьего порядков. Это вызвано тем, что некоторые формулы *векторной алгебры*, записанные через определители, имеют достаточно компактный вид и удобны как при изложении теории, так и при решении задач. Более полная теория определителей изложена далее (см. **7**).

Четырем числам a_1, b_1, a_2, b_2 можно поставить в соответствие выражение $a_1 b_2 - a_2 b_1$, которое называют ***определителем второго порядка*** и обозначают в виде следующей таблицы из двух строк и двух столбцов, отделяемой слева и справа вертикальными линиями:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Числа a_1 и b_2 из-за их расположения в определителе (2.1) называют ***диагональными элементами*** определителя второго порядка и говорят, что они расположены на его ***главной диагонали***. Аналогично числа a_2 и b_1 расположены на ***второй*** (или ***побочной***) ***диагонали*** определителя. Можно сказать, что определитель второго порядка равен произведению его элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали, например:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - (5 \cdot 7) = -41.$$

3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В основе аналитической геометрии лежит возможность однозначного описания точек при помощи наборов чисел, называемых координатами. Описание множества с помощью соотношений между координатами входящих в него точек позволяет привлечь для его исследования алгебраические методы, что значительно расширяет возможности анализа. Наоборот, уравнения, неравенства и их системы можно интерпретировать как зависимости между координатами точек и ассоциировать с ними множество, составленное из точек, координаты которых удовлетворяют этим зависимостям, и, следовательно, получить наглядное представление чисто алгебраической задачи (например, в случае поиска решений уравнений и их систем). Таким образом, возникает своеобразный мостик, связывающий алгебру и геометрию. Его роль выполняет система координат.

3.1. Декартова система координат

Существуют различные способы задания точек набором координат. Аналитическая геометрия опирается на простейшую систему координат — прямоугольную, которая известна из школьного курса математики. Мы дадим определение прямоугольной системы координат, используя *векторную алгебру*. Фактически мы построим систему координат более общего вида, в которой оси координат могут находиться по отношению друг к другу под произвольным углом. Прямоугольная система координат будет частным случаем, когда углы между осями координат будут прямыми.

Назовем ***декартовой*** (***аффинной***) ***системой координат*** пару, состоящую из фиксированной точки O и некоторого

4. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Алгебраические кривые первого порядка

Остановимся на изучении *алгебраических кривых первого порядка* на плоскости, т.е. кривых, которые в некоторой *прямоугольной системе координат* описываются *алгебраическим уравнением первого порядка* $ax + by + c = 0$, где хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля[1]. Это уравнение называют также ***линейным уравнением***.

Теорема 4.1. Любая прямая на плоскости представляет собой алгебраическую кривую первого порядка и любая алгебраическая кривая первого порядка на плоскости есть прямая.

◀ Рассмотрим произвольную прямую L на плоскости. Пусть точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на L, а *ненулевой вектор* $\boldsymbol{n} = \{a; b\}$ перпендикулярен этой прямой. При таких исходных условиях произвольная точка $M(x; y)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{n}$ (рис. 4.1).

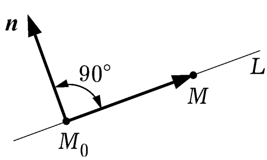

Рис. 4.1

Зная координаты векторов $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ и $\boldsymbol{n}$, запишем условие ортогональности этих векторов через их *скалярное произведение*: $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ или $ax + by + c = 0$, где $c = -ax_0 - by_0$. Так как $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$, то либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. Первое утверждение теоремы доказано.

[1]Условие, что коэффициенты a и b одновременно не обращаются в нуль, коротко можно записать так: $a^2 + b^2 \neq 0$.

5. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Алгебраические поверхности первого порядка

Уравнение первого порядка с тремя неизвестными имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C должен быть отличен от нуля. Оно задает в пространстве в *прямоугольной системе координат* $O\mathrm{xyz}$ *алгебраическую поверхность первого порядка.*

Свойства алгебраической поверхности первого порядка во многом аналогичны свойствам прямой на плоскости — *геометрическому образу уравнения первого порядка с двумя неизвестными.*

Теорема 5.1. Любая плоскость в пространстве является поверхностью первого порядка и любая поверхность первого порядка в пространстве есть плоскость.

◄ Как утверждение теоремы, так и ее доказательство аналогичны теореме 4.1. Действительно, пусть плоскость π задана своей точкой M_0 и *ненулевым вектором* $\boldsymbol{n}$, который ей перпендикулярен. Тогда множество всех точек в пространстве разбивается на три подмножества. Первое состоит из точек, принадлежащих плоскости, а два других — из точек, расположенных по одну и по другую стороны плоскости. Какому из этих множеств принадлежит произвольная точка M пространства, зависит от знака *скалярного произведения* $\boldsymbol{n}\overrightarrow{M_0M}$. Если точка M принадлежит плоскости (рис. 5.1, *а*), то *угол между векторами* $\boldsymbol{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ прямой, и поэтому, согласно теореме 2.1,

6. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

6.1. Виды матриц

Определение 6.1. ***Матрицей типа*** (или ***размера***) $m \times n$ называют прямоугольную числовую таблицу, состоящую из mn чисел, которые расположены в m строках и n столбцах. Составляющие матрицу числа называют ***элементами*** этой ***матрицы***. Как правило, их обозначают строчной буквой с двумя индексами, например a_{ij}, где i — номер строки ($i = \overline{1, m}$), j — номер столбца ($j = \overline{1, n}$), в которых расположен этот элемент.

Матрицы обозначают

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Используют и другие сокращенные обозначения: $(a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m}^{1 \leqslant j \leqslant n}$ или просто (a_{ij}), если по тексту ясно, в каких пределах изменяются индексы i и j. Матрицу как единый объект обозначают прописной буквой: A, B и т.д. Элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце, мы будем также записывать в виде $[A]_{ij}$, что удобно при проведении доказательств.

Элементами матриц могут быть не только действительные числа, но и *комплексные*, и даже другие математические объекты. Например, мы будем встречаться с матрицами, элементами которых будут многочлены или матрицы.

Множество всех числовых матриц типа $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, будем обозначать $M_{mn}(\mathbb{R})$.

7. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

7.1. Определители n-го порядка

Мы уже познакомились с *определителями второго* и *третьего порядков*, которые использовали в *векторной алгебре* и при решении *систем двух* и *трех линейных уравнений*. Теперь мы приступаем к изучению определителей произвольного порядка. В теории таких определителей используются понятия перестановки, подстановки и их четности. Соответствующий материал подробно изложен в [I-4.5], а мы напомним только самые необходимые сведения.

Всякое расположение чисел 1, 2, 3, …, n в определенном порядке называют ***перестановкой*** из n чисел. Из n чисел можно образовать $n!$ различных перестановок. В общем случае перестановку записывают в виде *матрицы-строки* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Перестановку $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ называют ***нормальной***.

Два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ образуют ***инверсию***, если $\alpha_j > \alpha_i$, но при этом α_i стоит в перестановке правее α_j (т.е. $i > j$). Общее количество инверсий в перестановке α обозначают $|\alpha|$, и если это число четное, то перестановку называют ***четной***, а если оно нечетное — ***нечетной***.

Пример 7.1. Определим, какова четность перестановки $\alpha = (4, 5, 1, 3, 6, 2)$, т.е. выясним, является она четной или нечетной. Для этого подсчитаем в α количество инверсий. Правее числа 4 стоят три числа, меньшие его: 1, 3 и 2. Следовательно, числу 4 соответствует три инверсии с числами, стоящими справа от него. Справа от числа 5 стоят также три числа, которые меньше 5. Следовательно, числу 5 тоже

8. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И РАНГ МАТРИЦЫ

8.1. Обратная матрица и ее свойства

Определение 8.1. Пусть A — *квадратная матрица порядка* n. Квадратную матрицу B того же порядка называют ***обратной*** к A, если $AB = BA = E$, где E — *единичная матрица* порядка n.

Обратную матрицу обозначают A^{-1}. Она позволяет определить целую отрицательную степень матрицы A. А именно, для $n > 0$ полагают $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Теорема 8.1. Если квадратная матрица A имеет обратную матрицу, то обратная матрица единственная.

◀ Предположим, что матрица A имеет две обратные матрицы B и B'. Тогда, согласно определению 8.1 обратной матрицы, выполнены, в частности, равенства $AB' = E$ и $BA = E$. Используя ассоциативность умножения матриц, получаем

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B',$$

т.е. матрицы B и B' совпадают. ▶

Квадратная матрица не всегда имеет обратную. Установить, имеет ли данная матрица обратную, позволяет следующий критерий.

Теорема 8.2. Для того чтобы квадратная матрица A порядка n имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы $\det A \neq 0$.

9. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

9.1. Основные определения

Система m ***линейных алгебраических уравнений*** с n неизвестными (сокращенно ***СЛАУ***) представляет собой систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.1}$$

Уравнения системы (9.1) называют алгебраическими потому, что левая часть каждого из них есть *многочлен от* n *переменных* $x_1, \ldots, x_n$, а линейными потому, что эти многочлены имеют первую *степень*.

Числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$ называют ***коэффициентами СЛАУ***. Их нумеруют двумя индексами: номером уравнения i и номером неизвестного j. Действительные числа $b_1, \ldots, b_m$ называют ***свободными членами уравнений***.

Запись СЛАУ в виде (9.1) будем называть ***координатной***.

СЛАУ называют ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. Иначе ее называют ***неоднородной***.

Решением СЛАУ, да и вообще всякой системы уравнений, называют такой набор значений неизвестных $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, при подстановке которых каждое уравнение системы превращается в тождество. Любое конкретное решение СЛАУ также называют ее ***частным решением***.

Решить СЛАУ — значит решить две задачи:

– выяснить, имеет ли СЛАУ решения;

– найти все решения, если они существуют.

10. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

10.1. Проблемы, связанные с вычислениями

При разработке любого численного метода решения какой-либо математической задачи возникает несколько общих проблем.

Первая проблема состоит в том, что теоретически корректный метод, приводящий к решению за конечное число операций, может оказаться плохим или вообще неприемлемым, если это конечное число операций окажется слишком большим. Например, при решении *СЛАУ* с *квадратной невырожденной матрицей порядка* n по *правилу Крамера* необходимо вычислить $n+1$ *определитель* n-го порядка. При вычислении только одного из этих определителей „в лоб“, согласно определению 7.1, требуется $n!n-1$ арифметических операций. Таким образом, всего для решения системы требуется $(n+1)(n!n-1)+n$ операций. Уже при $n=23$ это число имеет порядок 10^{21}. Даже при скорости 10^9 операций в секунду потребуется не менее 30000 лет!

Вторая проблема связана с тем, что в практических задачах приходится иметь дело с неточными данными. При решении СЛАУ с квадратной матрицей требуется, чтобы определитель Δ матрицы системы был отличен от нуля. Однако нарушение этого условия, т.е. соотношение $\Delta = 0$, никогда не выполняется точно, так как *коэффициенты СЛАУ* содержат, вообще говоря, погрешности, и определитель можно вычислить лишь приближенно. При этом, если определитель Δ мал по сравнению с коэффициентами системы, то небольшие погрешности могут приводить к существенному изменению решения.

11. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кривая второго порядка на плоскости в *прямоугольной системе координат* описывается уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{11.1}$$

в котором коэффициенты A, B, C одновременно не обращаются в нуль.

В этой главе мы не ставим себе задачу выявить все кривые, которые могут быть представлены уравнением второй степени, т.е. мы не будем проводить их полную классификацию. Это удобно выполнять при помощи методов линейной алгебры [IV]. Здесь же мы опишем известные кривые второго порядка и их свойства, а также покажем, как можно упростить некоторые частные виды уравнения второго порядка при помощи преобразования *параллельного переноса системы координат* и определить вид кривой и ее характеристики.

11.1. Эллипс

Определение 11.1. Множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть заданная постоянная величина, называют ***эллипсом***.

Определение эллипса дает следующий способ его геометрического построения. Фиксируем на плоскости две точки F_1 и F_2, а неотрицательную постоянную величину обозначим через $2a$. Пусть расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2c$. Представим себе, что нерастяжимая нить длиной $2a$ закреплена в точках F_1 и F_2, например, при помощи двух иголок. Ясно, что

12. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

12.1. Поверхность вращения и преобразование сжатия

Поверхность вращения. Простейшие поверхности в пространстве — это плоскости. Они являются *геометрическими образами уравнений первой степени* от трех переменных. Другой достаточно простой тип поверхностей составляют поверхности вращения.

Определение 12.1. Поверхность Ω называют ***поверхностью вращения***, если она образована окружностями с центрами на некоторой прямой L (оси вращения), которые расположены в плоскостях, перпендикулярных L (рис. 12.1).

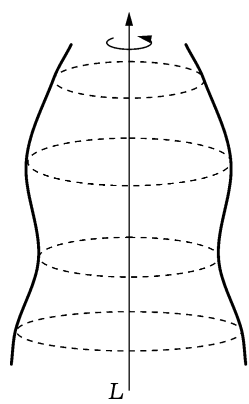

Рис. 12.1

Уравнение поверхности вращения Ω имеет наиболее простой вид, когда *начало O прямоугольной системы координат* лежит на оси вращения, а *ось Oz* совпадает с ней. Пересечение поверхности Ω с *координатной плоскостью Oxz* — это некоторое множество S (рис. 12.2), вращение которого образует Ω.

Предположим, что множество S в плоскости Oxz описывается уравнением $\varphi(x,z)=0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x;y;z)$. Она удалена от оси Oz на расстояние $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Если точка M лежит на поверхности вращения Ω, то точки $M_1(x_1;0;z)$, $M_2(x_2;0;z)$ с той же аппликатой z, что и M, и абсциссами $x_1=d$,

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. М.: Наука, 1979. 512 с.

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. пособие для физ.-мат. и инж.-физ. специальностей вузов. 6-е изд., стереотип. М.: Наука, 1984. 319 с.

Беллман Р. Введение в теорию матриц / Пер. с англ. под ред. *В.Б. Лидского.* М.: Наука, 1969. 368 с.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 576 с.

Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. 12-е изд., стереотип. М.: Наука, 1975. 272 с.

Ильин В.А., *Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия: Учеб. для университетов. 4-е изд., доп. М.: Наука, 1988. 224 с.

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 8-е изд. М.: Наука, 1965. 432 с.

Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. *С.П. Демушкина.* М.: Наука, 1978. 280 с.

Погорелов А.В. Аналитическая геометрия: Учеб. для мат. и физ. специальностей вузов. 4-е изд., стереотип. М.: Наука, 1978. 208 с.

Постников М.М. Аналитическая геометрия. 2-е изд., перераб. М: Наука, 1986. 414 с.

Хорн Р., *Джонсон Ч.* Матричный анализ / Пер. с англ. под ред. *Х.Д.Икрамова.* М.: Мир, 1989. 655 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., *Наумович А.Ф.*, *Наумович Н.Ф.* Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова.* Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. 13-е изд., стереотип. М.: Физматлит, 1995. 872 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Пер. с англ. под ред. *И.Г. Арамановича.* М.: Наука, 1973. 832 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров.* М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. 2-е изд., стереотип. Киев: Техніка, 1977. 768 с.

Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика / Пер. с франц. под ред. *А.Н. Колмогорова.* М.: Мир, 1966. 272 с.

Задачники

Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учеб. пособие / Под ред. *Д.В. Беклемишева.* М.: Наука, 1987. 496 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Т. 1. 4-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 304 с.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. 14-е изд., исправл. М.: Наука, 1986. 222 с.

Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Просвещение, 1964. 184 с.

Сборник задач по математике для втузов: Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов. / Под ред. *А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.* 2-е изд. М.: Наука, 1986. 428 с.

Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 29-е изд., стереотип. М.: Наука, 1968. 366 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск 3

Канатников Анатолий Николаевич
Крищенко Александр Петрович

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 15.01.2017. Формат 60×90 1/16.
Усл. печ. л. 24,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru; www.baumanpress.ru

Отпечатано в ПАО «Т8 Издательские Технологии»
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие
В. М. Постникова, В. М. Черненького
«Методы принятия решений в системах организационного управления»

Год издания: 2014
Тип издания: Учебное пособие
Объем: 208 стр. / 13 п.л.
Формат: 60x90/16
ISBN: 978-5-7038-3946-1

Рассмотрены основные понятия, методы и подходы, определяющие процесс принятия управленческого решения. Изложены методы принятия решений в условиях определенности и неопределенности, метод анализа иерархий, логико-интуитивные методы, а также коллективные методы принятия решения. Приведены примеры для быстрого усвоения теоретического материала и его дальнейшего использования при выполнении домашних заданий, курсовых и дипломных проектов, а также при решении конкретных задач производственной деятельности.

Для студентов вузов, обучающихся по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника» специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Различные части книги будут интересны и полезны также студентам экономических специальностей, аспирантам, научным сотрудникам, преподавателям, слушателям второго высшего образования и широкому кругу специалистов, чья деятельность связана с принятием решений.

Информацию о других новых книгах можно получить
на сайте Издательства МГТУ им. Н. Э. Баумана
www.baumanpress.ru
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
телефон: 8 499 263-60-45;
факс: 8 499 261-45-97

BAUMANPRESS
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышла в свет монография
В.И. Ванько
«Очерки об устойчивости элементов конструкций»

Год издания: 2014
Тип издания: монография
Объем: 224 стр. / 14 п.л.
Формат: 60х90/16
ISBN: 978-5-7038-3919-5

Рассматриваются классические задачи о продольном изгибе упругопластического стержня; вводится понятие о корректности квазистатической постановки и выводится достаточное условие: постановка корректна, пока жесткость на изгиб наиболее нагружаемого изгибающим моментом поперечного сечения не станет меньше приложенной продольной силы (в безразмерных параметрах).

На основе кинематической схемы, разработанной совместно с С.А. Шестериковым, изучаются большие перемещения (вплоть до полного сплющивания) точек срединной поверхности цилиндрических оболочек (бесконечно длинных и конечной длины) под действием внешнего гидростатического давления. Для всех рассматриваемых постановок выводятся приближенные (асимптотические) формулы.

При изучении плоскопараллельных движений с тремя степенями свободы показано, что аэродинамическая неустойчивость есть неустойчивость по Ляпунову положений равновесия профиля. Полученное достаточное условие, так же как и классическое, инвариантно относительно механических свойств конструкции. Приводятся многочисленные приложения упомянутых исследований.

Книга будет полезной студентам и специалистам, занимающимся математическим моделированием поведения конструкций.

Информацию о других новых книгах можно получить
на сайте Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана
http://baumanpress.ru
По вопросам приобретения обращаться в отдел реализации Издательства:
телефон: 8 499 263-60-45;
факс: 8 499 261-45-97
press@bmstu.ru