

Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана

Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин

Математические модели процессов теплопроводности

Учебное пособие



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2 0 1 6

УДК 517.9+536.2

ББК 22.371я73

В58

Издание доступно в электронном виде на портале ebooks.bmstu.ru
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/93/book1486.html>

Факультет «Фундаментальные науки»

Кафедра «Прикладная математика»

Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н. Э. Баумана в качестве учебного пособия

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *М. П. Галанин*

д-р техн. наук, профессор *И. В. Станкевич*

Власова, Е. А.

В58 Математические модели процессов теплопроводности : учебное пособие / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. — 124, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4380-2

Изложены сведения, составляющие содержание раздела «Математические модели тепловых систем» курса «Математические модели технических систем». Приведены примеры решения задач, а также контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы студентов. Часть задач может служить основой для проведения студентами самостоятельной научно-исследовательской работы.

Для студентов старших курсов технических специальностей.

УДК 517.9+536.2

ББК 22.371я73

© Власова Е. А., Зарубин В. С.,
Кувыркин Г. Н., 2016

© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016

ISBN 978-5-7038-4380-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема достоверного определения *температурного состояния* элементов конструкций — одна из важнейших в современной технике. От ее успешного решения зависят возможности повышения надежности, эффективности и ресурса работы теплонапряженных узлов различных машин, агрегатов и энергетических установок.

В инженерной практике при проектировании технических устройств проводят расчет температурного состояния элементов конструкций. Для этого выполняют построение и количественный анализ *математических моделей* (ММ) в виде совокупности соотношений, достаточно полно и точно (адекватно) отражающих свойства и поведение объекта. Адекватные ММ позволяют не только получить достоверную информацию на стадии проектирования, но и выбрать рациональные режимы эксплуатации технического устройства, проанализировать предельные возможности форсирования его рабочих характеристик и вероятность возникновения аварийных ситуаций.

Температурное состояние элементов конструкций технических устройств как твердых тел обусловлено процессом теплопроводности в этих элементах. Поэтому важно уметь разрабатывать и анализировать *ММ теплопроводности*. В пособии с единых позиций рассмотрена совокупность таких ММ и приведены примеры их применения в инженерной практике.

Пособие состоит из шести глав, параграфы в которых имеют двойную нумерацию (например, 2.3 — третий параграф во второй главе). Ссылки в тексте на параграфы и главы набраны полужирным шрифтом (например, см. **2.3**). Аналогично пронумерованы формулы и рисунки (например, (3.4) — четвертая формула в третьей главе, рис. 5.6 — шестой рисунок в пятой главе).

Структура пособия отражает блочно-модульное построение курса «Математические модели технических систем», занимающего

ключевое место в профессиональном цикле подготовки инженеров-математиков по специальности «Прикладная математика». Оно содержит материал одного из разделов этого курса, посвященного ММ тепловых систем. Каждая из глав пособия соответствует блоку, а параграфы в главе — модулям, т. е. логически замкнутым частям материала, имеющего самостоятельное значение при изучении курса. Модули и блоки тесно связаны в теоретическом, методическом и терминологическом отношении. Эти связи поддерживаются реализованным в пособии развитым справочным аппаратом.

В конце пособия помещены литература и предметный указатель, содержащий в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все введенные в пособие термины с указанием страницы, на которой термин определен или описан (на этой странице его можно найти по выделенным **полуужирным курсивом** словам). Выделение термина *светлым курсивом* означает, что в данном параграфе он отнесен к ключевым словам и для понимания излагаемого материала читателю должно быть известно значение этого термина. Читатель может уточнить это значение, найдя с помощью предметного указателя необходимую страницу, на которой термин определен или пояснен. Справочный аппарат пособия дополнен списком основных обозначений и сокращений, единиц измерения физических величин и используемых сокращений, в котором наряду с их краткой расшифровкой указаны параграфы, где они использованы и более подробно объяснены.

Математическое моделирование опирается на знание многих разделов математики. Это относится и к изучению *математических моделей теплопроводности*, которое основывается на широком использовании междисциплинарных связей. Перед работой с пособием необходимо в целях самоконтроля выполнить приведенные ниже несложные задания. В каждом задании приведена ссылка на книги из списка рекомендуемой литературы, в которых при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полуужирным** шрифтом, далее будем

считать известными (эти термины в основном тексте пособия не выделены и в его предметный указатель не входят).

Задания для самопроверки

1. Что понимают под **сплошной средой** и **твердым телом**, **правилом суммирования по одинаковым латинским индексам**? Дайте определения **первого** и **второго закона термодинамики**. Какой **тензор второго ранга** можно привести к **главным осям**? [17]

2. Дайте определения **внутренней**, **граничной** и **предельной точек множества**, **открытого** и **замкнутого множеств**, **замыкания множества** и **отображения множеств**, **функции возрастающей** и **взаимно однозначной**, **непрерывной** и **непрерывно дифференцируемой функций**. [20, 31]

3. Что такое **модуль вектора**, **радиус-вектор**, **коллинеарные векторы**, **скалярное произведение векторов**, **скалярный квадрат вектора**, **орты репера ортогональной системы координат**, **симметрическая** и **диагональная матрицы**, **матрица-столбец**? Перечислите **аксиомы линейного пространства**, **скалярного умножения** и **нормы** в таком пространстве. Запишите **тривиальную линейную комбинацию функций x^n для $n = \overline{2, 5}$** . Дайте определение **евклидова пространства**. В каком случае это **пространство** будет **полным**? Какими свойствами обладают **собственные значения** и **собственные векторы** симметрической матрицы? [21, 23]

4. Что называют **частной производной функции многих переменных** и **производной этой функции по направлению**, **функцией** и **множителем Лагранжа**? Каковы **необходимое** и **достаточное условия** существования **условного экстремума** для функции многих переменных при заданном **дополнительном условии**. Что понимают под **внешней нормалью** к **кривой** или **поверхности**, **ограничивающей некоторую область**? [22]

5. Сформулируйте свойства определенного **интеграла с переменным верхним пределом**. Что называют **кратным** (в том числе **двойным** и **тройным**), **криволинейным** и **поверхностным интегралами**, **скалярным** и **векторным полями**? Напишите **формулу Остроградского — Гаусса**. [10, 16]

6. В чем различие между **общим** и **частным** решениями **обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)**? Запишите **частичную сумму** и **остаток ряда Тейлора**. В чем различие между **ортогональной** и **ортонормированной системами функций**. Дайте определение **линейного многообразия**. Каковы признаки **дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов**? [1, 8]

7. Что понимают под **математическим моделированием** применительно к техническим устройствам и каковы его основные этапы? Что такое **расчетная схема** технического объекта или процесса? Какую роль играют *математические модели* в естественнонаучных и инженерных дисциплинах? Каковы структура и свойства математических моделей? Приведите классификацию математических моделей. [15]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

Математические обозначения

- # — окончание примера **1.1**
- $x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X (например, $M \in V$ — точка M принадлежит телу, занимающему область V или имеющему объем V) **1.1**
- $x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X **3.3**
- \mathbb{N} — множество натуральных чисел **3.1**
- \mathbb{R} — множество действительных чисел (числовая прямая) **3.1**
- $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ — оператор A отображает множество \mathcal{U} на (или в) множество \mathcal{W} **3.1**
- $n = \overline{1, N}$ — число $n \in \mathbb{N}$ принимает последовательно все значения из множества \mathbb{N} натуральных чисел от 1 до N включительно **3.1**
- $S \setminus S_T$ — разность множеств S и S_T **3.2**
- \cup — символ операции объединения множеств **2.3**
- \cap — символ операции пересечения множеств **6.1**
- $V' \subset V$ — подмножество V' включено в множество V (V включает V') **1.2**
- $S_s \subseteq S$ — подмножество S_s включено в множество S или совпадает с ним **2.1**
- $|\cdot|$ — абсолютное значение числа или модуль вектора **1.3**
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} **1.1**
- $\det(\cdot)$ — определитель квадратной матрицы **1.1**
- ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона **1.1**

| | |
|--------------------------------|---|
| ∇^2 | — дифференциальный оператор Лапласа 1.2, 1.3 |
| $\text{grad} = \nabla$ | — символ дифференциальной операции вычисления градиента 1.1 |
| $\text{div} = \nabla \cdot$ | — символ дифференциальной операции вычисления дивергенции 1.2 |
| $D(A), R(A)$ | — области определения и значений оператора A 3.1 |
| \exists | — квантор существования ($\exists x$ — «существует такой элемент x , что ...») 3.1 |
| \forall | — квантор всеобщности ($\forall x$ — «для любого элемента x ...») 2, 3.1 |
| $[a, b], (a, b)$ | — отрезок и интервал с концами в точках $a, b \in \mathbb{R}$ 3.1, 4.2 |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | — скалярное произведение элементов гильбертова пространства 3.1 |
| $\ \cdot \ $ | — норма элемента нормированного пространства 3.1 |
| A_r | — коэффициент поглощения излучения поверхностью 2.1 |
| $a^{(T)}$ | — температуропроводность изотропного материала тела 1.1 |
| $\hat{a}^{(T)}$ | — тензор температуропроводности анизотропного материала тела 1.1 |
| C_T | — полная теплоемкость тела 2.3 |
| c | — объемная теплоемкость материала тела 1.1 |
| e_i | — орты репера ортогональной системы координат ($i = 1, 2, 3$) 1.1 |
| $J[T], I[T, q]$ | — альтернативные функционалы 4.3, 5.1 |
| n | — единичный вектор нормали к поверхности или к кривой 1.1 |
| n_i | — проекции (направляющие косинусы) единичного вектора нормали на оси Ox_i прямоугольной системы координат ($i = 1, 2, 3$) 3.3, 4.3 |
| Ox_i | — оси прямоугольной системы координат ($i = 1, 2, 3$) 1.1, 3.3 |

Обозначения физических величин

| | |
|-----------------------|---|
| Q | — тепловой поток 2.3, 5.1 |
| q | — плотность теплового потока 1.1 |
| \mathbf{q} | — вектор плотности теплового потока 1.1 |
| R_r | — коэффициент отражения излучения поверхностью 2.1 |
| S | — поверхность или ее площадь 1.2 |
| T | — абсолютная температура 1.1 |
| t | — время 1.1 |
| t_r | — время релаксации 1.3 |
| V | — пространственная область или ее объем 1.1 |
| w | — объемная плотность аккумулированной теплоты 1.2 |
| α | — коэффициент теплообмена 2.1 |
| α_s | — коэффициент контактного теплообмена 2.1 |
| δ_{ij} | — символ Кронекера ($i, j = 1, 2, 3$) 5.1 |
| δJ | — вариация функционала J 4.1 |
| δT | — вариация температуры T 4.1 |
| ε_r | — коэффициент излучения поверхности 2.1 |
| θ | — безразмерная температура 2.2 |
| $\lambda^{(T)}$ | — теплопроводность изотропного материала тела 1.1 |
| $\lambda_r^{(T)}$ | — теплопроводность газа 2.1 |
| $\hat{\lambda}^{(T)}$ | — тензор теплопроводности анизотропного материала тела 1.1 |
| $\lambda_{ij}^{(T)}$ | — компоненты тензора теплопроводности ($i, j = 1, 2, 3$) 1.1 |
| σ_0 | — постоянная Стефана — Больцмана 2.1 |
| ψ | — потенциал теплопроводности 1.3 |

Условные сокращения

| | | |
|------|--|------------|
| ГИУ | — граничное интегральное уравнение | 3.3 |
| ГПУ | — гексогональная плотноупакованная (кристаллическая решетка) | 1.1 |
| ГЦК | — гранцентрированная кубическая (кристаллическая решетка) | 1.1 |
| КЭ | — конечный элемент | 3.2 |
| МГЭ | — метод граничных элементов | 3.3 |
| МКЭ | — метод конечных элементов | 3.2 |
| ММ | — математическая модель | |
| ОДУ | — обыкновенное дифференциальное уравнение | 2.3 |
| ОЦК | — объемноцентрированная кубическая (кристаллическая решетка) | 1.1 |
| СЛАУ | — система линейных алгебраических уравнений | 3.2 |

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Распространение теплоты в элементах конструкций технических устройств как в твердых телах обычно происходит посредством механизма теплопроводности. Поэтому определение **температурного состояния** твердых тел, характеризуемое распределением температуры в их объеме и изменением его во времени, требует количественного анализа **процесса теплопроводности**. Физический механизм этого процесса имеет атомно-молекулярный характер [32], причем в металлах он главным образом обусловлен движением свободных электронов [34], а в диэлектриках — колебаниями атомов в кристаллической решетке. Условия теплообмена на поверхности твердых тел связаны с двумя другими механизмами переноса теплоты: перемещением макроскопических объемов среды, называемым **конвекцией**, и распространением электромагнитных волн — **тепловым излучением**.

Совокупность информации о процессе переноса теплоты в твердом теле и условиях теплообмена на его поверхности составляют суть постановки **задачи теплопроводности**. Эта информация в формализованном виде входит в уравнения и дополнительные соотношения, связывающие заданные параметры с определяемыми величинами. Объединение таких уравнений и соотношений называют **математической моделью (ММ) теплопроводности**.

Одну и ту же задачу теплопроводности можно сформулировать несколькими математически равнозначными способами, т. е. построить различные по форме, но эквивалентные ММ. Это расширяет возможности решения задачи, поскольку каждая из ММ позволяет применить для нахождения искомого температурного состояния твердого тела наиболее подходящий метод. Применительно к новым, малоисследованным задачам, не поддающимся

распространения теплоты приводит к запаздыванию мгновенных значений температуры и теплового потока на интервалы времени порядка t_r . Эти интервалы обычно пренебрежимо малы по сравнению с характерными временами развития нестационарных процессов теплопроводности в большинстве случаев, встречающихся в инженерной практике.

Вопросы и задачи

1.1. Проведите подробный вывод (1.13), (1.15), (1.16), (1.23).

1.2. Убедитесь, что (1.23) и (1.24) справедливы при зависящей от времени t скорости v , если к подвижной координате перейти в соответствии с равенством $\xi = x - \int_0^t v(t') dt'$.

1.3. Тензору теплопроводности монокристалла в прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix},$$

элементы которой имеют размерность Вт/(м·К). Найдите главные значения этого тензора и установите ориентацию его главных осей относительно указанной системы координат.

2. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотренные в 1.2 и 1.3 дифференциальные уравнения теплопроводности входят в состав *дифференциальной формы математической модели (ММ) теплопроводности*. Они отражают общие черты, свойственные процессам теплопроводности, и имеют бесконечное множество решений. Особенности конкретного процесса устанавливают так называемые *условия однозначности*, являющиеся обязательной составляющей каждой ММ теплопроводности. Эти условия объединяют геометрические условия, включающие в себя информацию о форме и размерах области V решения задачи теплопроводности, физические условия, содержащие исходные данные о теплофизических свойствах материалов и действующих в теле внутренних источниках теплоты (при их наличии), и *краевые условия*, состоящие из временных и *граничных условий*, отражающих особенности протекания процесса переноса теплоты во времени и на границах области V . Для нестационарного процесса теплопроводности временные условия содержат информацию о распределении температуры $T(M, t_0)$ во всех точках M ($\forall M \in V$) этой области в некоторый момент времени t_0 , принимаемый за начальный. В этом случае говорят о *начальных условиях*. Если процесс теплопроводности стационарный, временные условия можно представить в виде

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} \equiv 0, \quad \forall M \in V.$$

Заданные на поверхности S рассматриваемого твердого тела объемом V граничные условия описывают его теплообмен с окружающей средой. Однако когда нахождение распределения температуры в этом теле неразрывно связано с одновременным определением *температурного поля* в окружающей среде, теплоносителях или контактирующих с ним твердых телах, на

и конденсатора емкостью C_e . Аналогичными будут и ММ, описывающие процессы изменения температуры $T(t)$ и напряжения $U(t)$ при зарядке конденсатора, причем тепловой поток Q , передаваемый телу, будет пропорционален силе I_e тока в электрической цепи, а (2.24) будет соответствовать зависимости

$$U(t_e) = \hat{U} - (\hat{U} - U_0) \exp\left(-\frac{t_e}{R_e C_e}\right),$$

в которой масштаб времени t_e в общем случае может отличаться от масштаба времени t , но должен удовлетворять условию

$$\frac{t_e}{t} = \frac{R_e C_e \hat{\alpha} S}{C_T}.$$

Установленную **аналогию** между ММ принято называть **электротепловой**. Она позволяет для сложной тепловой системы построить эквивалентную электрическую схему, включающую резисторы и конденсаторы, а затем использовать хорошо разработанные и формализованные приемы построения ММ электрических цепей для построения ММ тепловой системы [15].

Вопросы и задачи

2.1. В малом зазоре между двумя плоскими поверхностями установлен тонкий плоский металлический экран. Температура поверхностей T_1 и $T_2 > T_1$, коэффициенты излучения ε_1 и ε_2 соответственно, а коэффициенты излучения обеих поверхностей экрана одинаковы и равны ε_0 . Свойства всех указанных поверхностей отвечают модели серого тела.

Сравните плотности потока излучения, передаваемого от более нагретой поверхности к менее нагретой при наличии и отсутствии экрана в предположении, что температуру экрана можно считать однородной по его толщине.

2.2. В зазоре между двумя concentрическими сферическими поверхностями с диаметрами D_1 и $D_2 > D_1$ установлен тонкий сферический металлический экран диаметром D_0 . Температура сферических поверхностей T_1 и $T_2 > T_1$, коэффициенты излучения ε_1 и ε_2 соответственно, а коэффициенты излучения обеих поверхностей экрана одинаковы и равны ε_0 . Свойства всех указанных поверхностей отвечают модели серого тела.

Сравните суммарные значения теплового потока, передаваемого излучением от более нагретой поверхности к менее нагретой при наличии и отсутствии экрана в предположении, что температуру экрана можно считать однородной по его толщине. Сравните эти значения в случае, если экран и обе поверхности являются цилиндрическими.

2.3. Проведите подробный вывод (2.20) и (2.21).

2.4. Шар диаметром D_0 находится в сферической полости диаметром $D_1 > D_0$ и имеет начальную температуру T_0 . Температура T_1 поверхности полости сохраняет постоянное значение. Свойства поверхностей шара и полости отвечают модели серого тела и имеют коэффициенты излучения ε_0 и ε_1 соответственно.

Выведите зависимость изменения температуры $T(t)$ шара во времени t в предположении, что материал шара имеет объемную теплоемкость $c = \text{const}$ и достаточно высокую теплопроводность, позволяющую использовать для шара модель тела с однородной по его объему температурой. Как изменится эта зависимость, если материал шара будет иметь объемную теплоемкость $c = k_c T$, $k_c = \text{const}$?

2.5. Достаточно длинный сплошной круговой цилиндр диаметром D_0 находится в столь же длинной цилиндрической полости диаметром $D_1 > D_0$ и имеет начальную температуру T_0 . Температура T_1 поверхности полости сохраняет постоянное значение. Свойства поверхностей цилиндра и полости отвечают модели серого тела и имеют коэффициенты излучения ε_0 и ε_1 соответственно.

Найдите зависимость изменения температуры $T(t)$ цилиндра во времени t в предположении, что материал цилиндра имеет объемную теплоемкость $c = \text{const}$ и достаточно высокую теплопроводность, позволяющую использовать для цилиндра модель тела с однородной по его объему температурой.

2.6. Плоский нагреватель с температурой поверхности $T_1 = \text{const}$ нагревает плоский металлический лист толщиной h , имеющий начальную температуру $T_0 < T_1$. Зазор $\delta = \text{const}$ между нагревателем и листом мал по сравнению с размерами листа в его плоскости. Коэффициенты излучения и поглощения поверхности листа ε_0 и A_0 соответственно, а поверхности нагревателя ε_1 и A_1 .

Выведите зависимость изменения температуры $T(t)$ листа во времени t в предположении, что материал листа имеет объемную теплоемкость $c = \text{const}$ и достаточно высокую теплопроводность, позволяющую использовать для листа модель тела с однородной по его объему температурой. Поверхность листа, противоположную нагревателю, принять идеально теплоизолированной. Как изменится эта зависимость, если материал листа будет иметь зависящую от температуры объемную теплоемкость $c = k_c T$, $k_c = \text{const}$?

2.7. В дополнение к условиям задачи 2.6 помимо теплообмена излучением между листом и нагревателем происходит конвективный теплообмен с интенсивностью, характеризующейся коэффициентом теплообмена α . Противоположная поверхность листа участвует в конвективном теплообмене со средой, имеющей температуру $T_c = \text{const}$, коэффициент теплообмена α_0 .

Выведите уравнение, определяющее равновесную температуру \bar{T} листа в предположении, что материал листа имеет объемную теплоемкость $c = \text{const}$ и достаточно высокую теплопроводность, позволяющую использовать для листа модель тела с однородной по его объему температурой. Выведите формулу для оценки времени t^* , необходимого для достижения температурой листа значения $0,99\bar{T}$ при условии, что его начальная температура $T_0 < 0,75\bar{T}$.

2.8. Шар диаметром D в условиях космического пространства имеет полную теплоемкость $C_T = \text{const}$ и облучается потоком солнечной энергии плотностью $q_{\text{солн}}$, отраженным от Земли солнечным излучением плотностью $q'_{\text{солн}}$ и собственным излучением Земли плотностью q_0 . Поверхность шара имеет коэффициент излучения ϵ , коэффициент поглощения солнечного излучения $A_{\text{солн}}$ и коэффициент поглощения излучения Земли A .

Получите формулу для равновесной температуры поверхности шара. Используя для шара модель тела с однородной по объему температурой, постройте зависимость его температуры $T(t)$ от времени t при условии, что в начальный момент времени шар имел температуру T_0 . Как изменится эта зависимость, если $C_T = K_C T$, $K_C = \text{const}$?

2.9. Тело с однородной по объему температурой, имеющее невогнутую поверхность площадью S и зависящую от температуры T полную теплоемкость $C_T = K_C \sqrt{T}$, $K_C = \text{const}$, охлаждается путем собственного излучения в условиях космического пространства. Начальная температура тела T_0 , а коэффициент излучения его поверхности ε .

Выведите зависимость изменения температуры $T(t)$ тела от времени t и сравните между собой периоды времени охлаждения до значений температуры $T_0/2$ и $T_0/4$.

2.10. Шар диаметром D_0 находится в сферической полости диаметром $D_1 > D_0$ и имеет начальную температуру T_0 . Температура T_1 поверхности полости сохраняет постоянное значение. Свойства поверхностей шара и полости отвечают модели серого тела и имеют коэффициенты излучения ε_0 и ε_1 соответственно.

Выведите зависимость изменения температуры $T(t)$ шара во времени t в предположении, что материал шара имеет зависящую от температуры объемную теплоемкость $c = k_c T$ ($k_c = \text{const}$) и достаточно высокую теплопроводность, позволяющую использовать для шара модель тела с однородной по его объему температурой.

3. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В **1** и **2** рассмотрены составные части *дифференциальной формы математической модели (ММ) теплопроводности*. Краткий обзор возможных методов количественного анализа этой формы ММ приведен в [12]. Более широкий выбор методов анализа температурного состояния твердых тел возможен при переходе от дифференциальной к *интегральной форме ММ теплопроводности*.

3.1. Переход от дифференциальной формы модели к интегральной

Для обоснования преобразования *дифференциальной формы математической модели (ММ) теплопроводности* необходимо напомнить некоторые сведения из прикладного функционального анализа [9].

Множество, между элементами которого установлены определенные соотношения, обычно называют **пространством**. Если элементами такого множества являются функции, то говорят о **функциональном пространстве**. При выполнении аксиом линейного пространства его называют **линейным функциональным пространством**. Если в таком пространстве можно указать сколь угодно большое число линейно независимых функций, которые нельзя представить в виде линейных комбинаций других функций этого пространства, то его называют **бесконечномерным линейным функциональным пространством**.

Пусть \mathcal{U} и \mathcal{W} — некоторые функциональные пространства. Тогда отображение $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$ принято называть **оператором**, но при действиях с операторами используют терминологию, связанную с отображениями множеств. В частности, \mathcal{U} называют **областью определения оператора A** , обычно обозначаемую

Вопросы и задачи

3.1. Заменяя в примере 3.3 начальное условие на $T(x, 0) = T_0$, найдите зависимость $T(x, t)$ распределения температуры в плоской стенке от времени t методом Бубнова — Галеркина.

3.2. Выведите вторую формулу Грина (3.25), а также формулы (3.26) . . . (3.29).

3.3. Используя граничное интегральное уравнение, оцените температуру в центре правильного октаэдра с длиной ребра a , если в октаэдре действуют внутренние источники теплоты объемной мощностью q_V , его поверхность имеет температуру T_0 , а материал — теплопроводность $\lambda^{(T)}$. При тех же исходных данных сравните эту оценку со значениями температур в центре шаров, вписанного в октаэдр и описанного около него, а также шаров, равновеликих ему по объему и по поверхности.

4. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМА МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В 1.2, 2 и 3.2 рассмотрены в достаточно общем виде нелинейные *математические модели (ММ) теплопроводности* в *дифференциальной и интегральной формах*. Необходимость построения нелинейных ММ теплопроводности применительно к процессам, в которых температура T может меняться в довольно широких пределах, обусловлена зависимостью *объемной теплоемкости c и теплопроводности $\lambda^{(T)}$* материала тела от температуры и нелинейной зависимостью от T *объемной плотности q_V* мощности внутренних источников теплоты. Кроме того, нелинейные эффекты должны быть отражены в *граничных условиях* в силу нелинейной зависимости *плотности теплового потока* на поверхности тела от ее температуры. Причиной такой зависимости может быть существенное влияние на *температурное состояние* тела собственного *теплового излучения* или изменение *коэффициента теплообмена* с окружающей средой при изменении температуры поверхности.

Количественный анализ нелинейных ММ теплопроводности в общем случае возможен лишь с применением численных методов. Приемлемый с инженерной точки зрения приближенный метод должен не только давать необходимую информацию об искомом температурном состоянии рассматриваемого твердого тела, но и обеспечивать оценку достоверности этой информации, устанавливая возможные границы возникающей погрешности. Использование *вариационной формы ММ теплопроводности* дает возможность удовлетворить этим требованиям.

будем иметь функционал

$$\begin{aligned}
 I_a[T, \mathbf{q}] = & \int_{S_q} dS \int_{\bar{T}_*}^{T(P)} \frac{\partial f_q(P, T)}{\partial T} dT \int_{\bar{T}_*}^T \bar{\lambda}^{(T)}(T') dT' - \\
 & - \int_{S_T} q_i(P) n_i(P) dS \int_{\bar{T}_*}^{\bar{T}(P)} \lambda^{(T)}(T') dT' - \\
 & - \int_V \left(\frac{q_i(M) B_{ij}(M) q_j(M)}{2} - \int_{\bar{T}_*}^{T(M)} \frac{\partial q_V(M, T)}{\partial T} dT \int_{\bar{T}_*}^T \bar{\lambda}^{(T)}(T') dT' \right) dV.
 \end{aligned}$$

Здесь q_i — проекции вектора \mathbf{q} на оси Ox_i прямоугольной системы координат; B_{ij} — элементы матрицы третьего порядка, обратной матрице с элементами A_{ij} ; n_i — направляющие косинусы единичного вектора \mathbf{n} .

При выполнении условий (4.15) этот функционал на истинном решении достигает максимума. По аналогии с (4.16) функционал $I_a[T, \mathbf{q}]$ можно обобщить на случай неустановившегося процесса теплопроводности.

Основная трудность практического использования альтернативных функционалов состоит в сложности построения допустимых распределений $\mathbf{q}(M)$, $M \in V \cup S_q$, удовлетворяющих дополнительным условиям (4.21). Эту трудность можно преодолеть путем представления $\mathbf{q}(M)$ через функцию тока теплового потока [12].

Вопросы и задачи

4.1. Проведите подробный вывод (4.6), (4.7), (4.11), (4.13), (4.19) и (4.24).

5. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Одним из преимуществ *двойственной вариационной формы математической модели (ММ) теплопроводности* является возможность получения двусторонних оценок некоторых интегральных параметров, характеризующих *процесс теплопроводности* в твердом теле. К этим параметрам можно отнести среднюю по объему тела температуру, его суммарное *термическое сопротивление*, среднюю температуру участка поверхности тела или суммарный *тепловой поток*, проходящий через этот участок.

5.1. Двойственная вариационная форма линейной модели

Пусть в неоднородном теле, занимающем область V , ограниченную поверхностью S , действуют внутренние источники теплоты, мощность которых имеет *объемную плотность* $q_V(M)$, зависящую от положения точки $M \in V$ (рис. 5.1).

Для тела из *изотропного материала* примем, что его *теплопроводность* $\lambda^{(T)}(M)$ не зависит от температуры T . В общем случае для тела из *анизотропного материала* теплопроводность $\lambda^{(T)}$ следует заменить *тензором теплопроводности* $\hat{\lambda}(M)$ с компонентами $\lambda_{ij}^{(T)}(M)$ ($i, j = 1, 2, 3$) в *прямоугольной системе координат* $Ox_1x_2x_3$. Тогда *стационарное трехмерное температурное поле* будет удовлетворять *линейному*

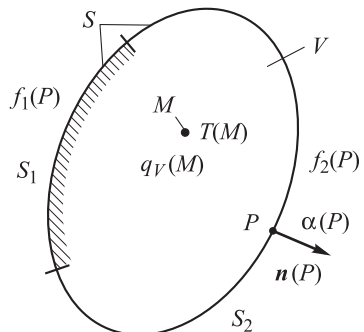


Рис. 5.1

При анализе нелинейной ММ функции $q'_V(M)$ и $f'_2(P)$ неизвестны, но, располагая полученным распределением $\psi(M)$, $M \in \bar{V} = V \cup S$, их можно в первом приближении заменить соответственно функциями

$$\frac{\partial \bar{q}_V(M, \psi)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\psi(M)}, \quad M \in V, \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{f}_2(P, \psi)}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\psi(P)}, \quad P \in S_2.$$

При этом для \hat{X}_1 следует найти гарантированную нижнюю оценку $\hat{X}'_1 \leq \hat{X}_1$, а значение $\Delta J^*[\psi]$, в силу (4.25) и (4.26), оценить сверху разностью $\Delta J[T, \mathbf{q}] = J_*[\psi] - I_*[\psi, \mathbf{q}]$ (см. 4.3). Окончательно получим

$$\bar{\Delta}^2(\psi) \leq 2 \frac{\Delta J[T, \mathbf{q}]}{\hat{X}'_1 V}.$$

Вопросы и задачи

5.1. Проведите подробный вывод (5.4), (5.5), (5.9), (5.24), (5.25).

5.2. В достаточно длинном стержне, имеющем квадратное поперечное сечение со стороной a , происходит энерговыделение с объемной мощностью q_V . Теплопроводность, температурный коэффициент линейного расширения и продольный модуль упругости материала стержня равны λ , α и E соответственно, а поверхность стержня имеет температуру T_0 .

Используя двойственную вариационную форму математической модели процесса установившейся теплопроводности, получите двусторонние оценки средней температуры в сечении стержня и осевого напряжения на его поверхности. Сравните полученные результаты со значениями для стержня с равновеликим по площади круглым поперечным сечением. Как изменятся результаты, если стержень имеет поперечное сечение в виде правильного треугольника со стороной a ?

5.3. Пористое тело состоит из двух компонентов с объемными долями η_1 и η_2 и теплопроводностями λ_1 и λ_2 соответственно. Объемная доля пор $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$. В порах находится воздух с коэффициентом теплопроводности λ_3 .

Используя двойственную вариационную форму математической модели процесса установившейся теплопроводности, получите двусторонние оценки коэффициента теплопроводности этого материала.

5.4. Убедитесь, что верхняя оценка термического сопротивления усеченного конуса в примере 5.2 при $r_2 \rightarrow r_1$ совпадает с нижней оценкой и соответствует термическому сопротивлению кругового цилиндра высотой H с основанием радиусом r_1 .

5.5. Материал прямой правильной усеченной шестигранной пирамиды высотой H с основаниями со сторонами a_1 и a_2 имеет теплопроводность λ .

Используя двойственную вариационную форму математической модели процесса установившейся теплопроводности, получите двусторонние оценки термического сопротивления этой пирамиды в направлении, перпендикулярном ее основаниям. Какие диаметры основания должен иметь прямой круговой цилиндр высотой H , выполненный из того же материала, чтобы значение термического сопротивления в направлении его оси совпало с полученными для усеченного конуса верхней и нижней оценками соответственно? Получите оценки термического сопротивления теплопередаче между основанием с температурой T_1 и средой с температурой T_c , если основание со стороной a_2 участвует в конвективном теплообмене с этой средой, причем коэффициент теплообмена α .

5.6. Материал прямого кругового усеченного конуса высотой H с основаниями площадью S_1 и S_2 имеет теплопроводность λ . Основание площадью S_1 участвует в конвективном теплообмене со средой, имеющей температуру $T_1 = \text{const}$, коэффициент теплообмена α_1 , а основание площадью S_2 участвует в конвективном теплообмене со средой, имеющей температуру $T_c = \text{const}$, коэффициент теплообмена α .

Используя двойственную вариационную форму математической модели процесса установившейся теплопроводности, получите двусторонние оценки средней температуры основания площадью S_1 и термического сопротивления теплопередаче между указанными средами. Как изменятся оценки термического сопротивления, если $\alpha_1 \rightarrow \infty$?

6. СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

В инженерной практике нередко возникает необходимость в анализе *температурного состояния* узлов и агрегатов теплотехнических устройств, состоящих из деталей сложной формы и выполненных из разнородных материалов. *Тепловой контакт* между этими деталями в общем случае не является *идеальным*, а на контактных поверхностях могут находиться теплоемкие массы и действовать источники теплоты. В таком случае требуется построение *математической модели (ММ) теплопроводности* в неоднородном теле с учетом выполнения *условий сопряжения температурных полей* на контактных поверхностях соприкасающихся деталей.

Для нелинейной *сопряженной задачи теплопроводности* в неоднородном теле, когда *теплопроводность* среды зависит и от температуры, и от пространственных координат, в общем случае не удастся построить *функционалы*, которые бы имели такие же экстремальные свойства, как функционалы для нелинейной задачи в *однородном теле* (см. 4). Чтобы и в случае сопряженной задачи использовать преимущество *двойственной вариационной формы ММ* и располагать критерием для оценки сходимости и погрешности приближенных решений, целесообразно учитывать зависимость от температуры теплопроводности материалов, составляющих неоднородное тело, последовательными приближениями через зависимость от пространственных координат. Тогда все остальные нелинейные факторы, связанные с *процессом теплопроводности*, удастся учесть непосредственно.

6.1. Дифференциальная форма модели

В каждой части с номером $n = \overline{1, N}$ неоднородного тела, состоящего из N частей, занимающей область V_n (рис. 6.1),

$\varphi_n = \Delta T (\partial f_{sn} / \partial (\Delta T))$. Допустимые для (6.11) распределения T_n , \mathbf{q}_n и T_s должны удовлетворять дополнительным условиям:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}_n &= q_V^{(n)} && \text{в } V_n, \\ q_i^{(n)} n_i &= -f_n && \text{на } S_n, \\ q_i^{(n)} n_i &= -f_{sn} && \text{и } f_{sm} + f_{sn} = q_s \text{ на } S_s, \end{aligned}$$

где ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

На истинных распределениях T_n^* и \mathbf{q}_n^* функционал (6.11) достигает максимума при выполнении условий (6.10) и

$$\left. \frac{\partial q_s}{\partial T_s} \right|_{T_s=T_s^*} \leq 0.$$

Если эти условия выполняются не только в стационарной точке этого функционала, но и для любых допустимых значений температуры в неоднородном теле, то этот максимум единственный. Для функционалов (6.9) и (6.11) справедливы аналогичные (4.25) неравенства $I_s[T, \mathbf{q}] \leq I_s[T^*, \mathbf{q}^*] = J_s[T^*] \leq J_s[T]$. Разность (6.9) и (6.11)

$$\Delta J_s[T, \mathbf{q}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \left(q_i^{(n)} + \lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_j} \right) r_{ij}^{(n)} \left(q_j^{(n)} + \lambda_{ij}^{(n)} \frac{\partial T_n}{\partial x_i} \right) dV$$

не зависит от выбора значения T_* и по аналогии с нелинейной задачей в однородном теле (см. 4.3) характеризует степень близости рассматриваемых допустимых распределений T_n , T_s и \mathbf{q}_n к истинному решению сопряженной задачи. Обобщение (6.9) и (6.11) на случай неустановившегося процесса теплопроводности возможно аналогично выполненному в 4.2 и 4.3.

Вопросы и задачи

6.1. Прделайте подробный вывод (6.7), (6.9), (6.10) и (6.11).

Литература

1. Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 347 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VIII).
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. шк., 1978. 328 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 496 с.
4. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
5. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 248 с.
6. Бреббия К., Теллес Ж., Врубелл Л. Методы граничных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
7. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 487 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XV).
8. Власова Е.А. Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 611 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IX).
9. Власова Е.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 699 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIII).

10. *Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.* Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 491 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
11. *Зарубин В.С.* Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 184 с.
12. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
13. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
14. *Зарубин В.С.* Расчет и оптимизация термоизоляции. М.: Энергоатомиздат, 1991. 192 с.
15. *Зарубин В.С.* Математическое моделирование в технике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 495 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XXI, заключительный).
16. *Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н.* Интегральное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 527 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VI).
17. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
18. *Зарубин В.С., Селиванов В.В.* Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.
19. *Зигель Р., Хауэлл Дж.* Теплообмен излучением: Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 936 с.
20. *Иванова Е.Е.* Дифференциальное исчисление функций одного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 407 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. II).

21. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 387 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. III).
22. *Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Дифференциальное исчисление функций многих переменных. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. 455 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. V).
23. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Линейная алгебра. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 335 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. IV).
24. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М. — Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
25. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 488 с.
26. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.
27. *Кувыркин Г.Н.* Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 142 с.
28. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
29. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
30. *Мальков В.А., Фаворский О.Н., Леонтьев В.Н.* Контактный теплообмен в газотурбинных двигателях и энергоустановках. М.: Машиностроение, 1978. 144 с.
31. *Морозова В.Д.* Введение в анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 407 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. I).

-
32. *Политехнический словарь* / Редкол.: А.Ю. Ишлинский (гл. ред.) и др. М.: Советская энциклопедия, 1989. 656 с.
33. *Попов В.М.* Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. М.: Энергия, 1971. 216 с.
34. *Теория тепломассообмена* / С.И. Исаев, И.А. Кожин, В.И. Кофанов и др.; Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 684 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аналогия электротепловая, 50

Базис счетный, 57

Вариация

– функции, 77

– функционала, 80

Время релаксации, 25

Гипотеза Био — Фурье, 13

Градиент температуры, 13

Дельта-функция, 66

Задача теплопроводности, 11

– сопряженная, 29

Значения тензора главные, 16

Излучение тепловое, 11

Изотерма, 13

Инвариант тензора, 16

Конвекция, 11

Контакт тепловой идеальный, 29

Коэффициент

– диффузии теплоты аккумулированной, 19

– излучения, 30

– отражения излучения, 30

– поглощения излучения, 30

– пропускания излучения, 30

– теплообмена, 35

– – контактного, 30

– угловой элементарный, 37

Материал

– анизотропный, 14

– изотропный, 13

– – трансверсально, 16

Матрица порядка третьего, 15

Метод

– Бубнова — Галеркина, 63

– граничных элементов (МГЭ), 68

– конечных элементов (МКЭ), 63

– невязок

– – взвешенных, 63

– проекций ортогональных, 63

Множество

– всюду плотное, 57

– выпуклое, 79

Модель математическая, 3

– теплопроводности, 11

Область

– значений оператора, 55

– определения оператора, 54

Оболочка линейная, 57

Оператор, 54

– взаимно однозначный, 55

– дифференциальный, 55

– интегральный, 55

– линейный, 55

– обратный, 55

– тождественный, 55

Оператор дифференциальный

– Гамильтона, 15

– Лапласа, 21

Оси кристаллографические, 17

Плотность

- объемная, 18
- потока
- – теплового, 13

Поверхность изотермическая, 13

Погрешность среднеквадратичная, 106

Подпространство нормированного пространства, 57

Поле температурное, 12

- двумерное, 12
- нестационарное, 12
- нуль-мерное, 12
- одномерное, 12
- стационарное, 12
- трехмерное, 12
- установившееся, 12

Последовательность, 57

Постоянная

- Стефана — Больцмана, 30

Потенциал теплопроводности, 23

Поток тепловой, 13

Пространство, 54

- банахово, 56
- гильбертово, 56
- функциональное, 54
- – линейное, 54

Процесс теплопроводности, 11

Разложение элемента по базису, 57

Решение

- классическое, 61
- обобщенное, 78
- слабое, 61

Символ Кронекера, 92

Система

- функций линейно независимая, 57
 - элементов замкнутая, 57
- Система координат
- прямоугольная, 14

- сферическая, 14

- цилиндрическая, 14

Сопротивление термическое, 40

Состояние температурное, 11

Среда диатермичная, 36

Тело

- однородное, 14

- термически тонкое, 44

Температура равновесная, 40

Температуропроводность, 19

Тензор

- симметричный второго ранга, 15
- температуропроводности, 19
- теплопроводности, 15

- шаровой, 16

Теплоемкость

- объемная, 18
- поверхностная, 114

Теплопроводность, 13

Теплота аккумулированная, 18

Точка стационарности функционала, 78

Уравнение

- Гельмгольца, 24

- Лапласа, 24

- Пуассона, 24

- Фурье, 24

- интегральное, 37

- – Фредгольма второго рода, 67

- – граничное (ГИУ), 67

- операторное, 55

- состояния, 19

- теплопроводности

- – в сплошной среде, 21

- – в твердом теле линейное, 24

- – в твердом теле нелинейное, 21

- – в твердом теле с постоянными коэффициентами, 24

- – дифференциальное, 21

Условие стационарности функционала,
78

Условия

- граничные, 28
- второго рода, 35
- первого рода, 35
- третьего рода, 35
- четвертого рода, 29
- краевые, 28
- согласованные, 60
- начальные, 28
- однозначности, 28
- сопряжения, 29

Форма ММ теплопроводности

- вариационная, 78
- двойственная, 84
- дифференциальная, 28
- интегральная, 61

Формула Грина первая, 61

Функции

- базисные, 63
 - проекционные, 63
- Функционал, 78
- выпуклый, 79
 - строго, 80

Функционалы альтернативные, 84

Функция формы КЭ, 63

Число

- Био, 39
- Маха, 42

Элемент

- граничный, 70
 - конечный симплексный, 63
- Элементы ортогональные, 58

Оглавление

| | |
|--|-----|
| Предисловие | 3 |
| Основные обозначения и условные сокращения | 7 |
| 1. Основные понятия и уравнения теории теплопроводности | 11 |
| 1.1. Основные понятия теории теплопроводности | 12 |
| 1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности | 19 |
| 1.3. Частные случаи уравнения теплопроводности | 22 |
| Вопросы и задачи | 27 |
| 2. Краевые условия в задачах теплопроводности | 28 |
| 2.1. Граничные условия и условия сопряжения | 29 |
| 2.2. Анализ нелинейных граничных условий | 36 |
| 2.3. Математическая модель термически тонкого тела | 44 |
| Вопросы и задачи | 50 |
| 3. Интегральная форма модели теплопроводности | 54 |
| 3.1. Переход от дифференциальной формы модели к интегральной | 54 |
| 3.2. Методы количественного анализа интегральной формы модели | 59 |
| 3.3. Преобразование интегральной формы модели к граничному интегральному уравнению | 65 |
| Вопросы и задачи | 74 |
| 4. Вариационная форма модели теплопроводности | 75 |
| 4.1. Вариационная форма модели для однородного тела | 76 |
| 4.2. Анализ выпуклости функционала | 79 |
| 4.3. Двойственная вариационная форма нелинейной модели | 84 |
| Вопросы и задачи | 90 |
| 5. Двусторонние оценки интегральных параметров | 91 |
| 5.1. Двойственная вариационная форма линейной модели | 91 |
| 5.2. Характерные случаи оценки интегральных параметров | 93 |
| 5.3. Оценка погрешности приближенного решения задачи | 106 |
| Вопросы и задачи | 109 |
| 6. Сопряженная задача для неоднородного тела | 111 |
| 6.1. Дифференциальная форма модели | 111 |
| 6.2. Интегральная форма модели | 115 |
| 6.3. Вариационная формулировка сопряженной задачи | 116 |
| Вопросы и задачи | 118 |
| Литература | 119 |
| Предметный указатель | 123 |

Учебное издание

ВЛАСОВА Елена Александровна
ЗАРУБИН Владимир Степанович
КУВЫРКИН Георгий Николаевич

**Математические модели
процессов теплопроводности**

Редактор *Г. А. Нилова*
Корректор *Н. А. Музыкантова*
Художник *Я. Н. Ильина*
Компьютерная верстка *И. К. Марчевского*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Подписано в печать 29.05.2016. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 8.0. Тираж 50 экз. Изд. № 468-2015 Заказ №

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н. Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com