

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{a} n dS$$

VII

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова,
В.Д. Морозова

**КРАТНЫЕ
И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ
ПОЛЯ**

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Математика в техническом
университете

Выпуск VII

*Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год*

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, исправленное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2008

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.1

Г12

Рецензенты: проф. Д.В. Георгиевский, проф. А.П. Фаворский

Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.

Г12 Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).

ISBN 978-5-7038-3190-8 (Вып. VII)

ISBN 978-5-7038-3022-2

Книга является седьмым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Она знакомит читателя с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами и с методами их вычисления. В ней уделено внимание приложениям этих типов интегралов, приведены примеры физического, механического и технического содержания. В заключительных главах изложены элементы теории поля и векторного анализа.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 112. Табл. 5. Библиогр. 46 назв.

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.1

© В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова,
В.Д. Морозова, 2001;
2008, с изменениями

© Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 2001;
2008, с изменениями

ISBN 978-5-7038-3190-8 (Вып. VII)

ISBN 978-5-7038-3022-2

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 2001;
2008, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двумерным, трехмерным (и в общем случае многомерным) областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей, задаваемых в пространстве действительными и векторными функциями векторного аргумента, составляющими предмет изучения теории поля и векторного анализа.

Эта книга является седьмым выпуском серии учебников „Математика в техническом университете“. При отборе и изложении материала авторы старались учесть существующие различия в его объеме, характерные для программ подготовки по различным инженерным специальностям.

Содержание книги тесно связано с материалом предшествующих выпусков: дифференциальным и интегральным исчислением функций одного действительного переменного, аналитической геометрией и линейной алгеброй. При ссылке в тексте на конкретный выпуск этой серии учебников его номер указан римской цифрой. Например, запись [I-2.4] означает ссылку на четвертый параграф второй главы первого выпуска. Ссылки в пределах этой книги набраны прямым полужирным шрифтом. Например, ссылка (см. **2.1**) указывает на первый параграф второй главы, а (см. **Д.7.2**) отсылает ко второму дополнению главы 7. Определения, теоремы, замечания, примеры, формулы, рисунки и т.п. имеют двойную нумерацию. Например, теорема 1.2 — это вторая теорема в главе 1, (2.1) — первая формула в главе 2, рис. 7.3 — третий рисунок в главе 7.

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в первом выпуске серии. В перечне основных обозначений данного выпуска наряду с их краткой расшифровкой указаны ссылки на разделы этого и других выпусков серии, в которых можно найти их более подробное объяснение. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все термины, выделенные в тексте *полужирным курсивом*, с указанием страницы, где они определены или описаны. Выделение термина (при его первом упоминании в каждом параграфе) *светлым курсивом* означает, что в этом параграфе он отнесен к ключевым словам и читателю должно быть известно его значение. Уточнить смысл термина можно, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу, на которой используемый термин определен или описан. Если термин введен в другом выпуске, то его номер в предметном указателе обозначен римской цифрой перед номером страницы (например, I-217). Светлым курсивом даны ссылки на страницы этого и других выпусков, указывающие некоторые пояснения или уточнения термина. Такое построение предметного указателя связывает материал всех выпусков серии „Математика в техническом университете“ единым справочным аппаратом, удобным для поиска нужной информации.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. В конце каждого задания указан номер того выпуска, в котором при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным** шрифтом, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в ее предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Запишите представления множеств **целых \mathbb{Z} и рациональных \mathbb{Q} чисел** при помощи множества **\mathbb{N} натуральных чисел**. Что является **элементом декартова произведения \mathbb{R}^2 двух множеств \mathbb{R} действительных чисел**? Что такое **объединение, пересечение и разность множеств**? [I]

2. Убедитесь, что если для **образов $Y_1 \subset Y$ и $Y_2 \subset Y$ отображения $f: X \rightarrow Y$ справедливо включение $Y_1 \subset Y_2$** , то для их **прообразов $X_1 = f^{-1}(Y_1) \subset X$ и $X_2 = f^{-1}(Y_2) \subset X$ справедливо включение $X_1 \subset X_2$** . [I]

3. Перечислите свойства **абсолютной величины (модуля) числа**. Запишите **неравенство треугольника**. [I]

4. Каков ход доказательства по методу **математической индукции**? Что понимают под **рекуррентным соотношением**? [I]

5. Каковы свойства **точных верхней и нижней границей ограниченного множества точек числовой прямой**? [I]

6. Что называют **ε -окрестностью точки** в \mathbb{R}^n ? Является ли **границная точка множества его предельной точкой**? Приведите пример множества в \mathbb{R}^n , не имеющего ни одной **внутренней точки**. Что называют **диаметром, границей и внутренностью множества**? Какие множества называют **открытыми, замкнутыми, компактными (компактами), линейно связными**? [I], [V]

7. Изобразите на плоскости с заданной **прямоугольной декартовой системой координат Oxy** множество точек $D = \{(x; y): x \in (-1, 1], \sqrt{4-x^2} \leq y < 4-x^2\}$. [I], [III]

8. Каков смысл символов o и O при сравнении бесконечно малых? Напишите **формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа**. [I], [II]

9. Сформулируйте и запишите определение **предела действительной функции действительного переменного** в

заданной точке. Перечислите свойства функций, имеющих в точке **конечный предел**. [I]

10. Сформулируйте и запишите определение **предела векторной функции многих переменных в точке**. Что можно сказать о пределах в той же точке ее **координатных функций**? [V]

11. Сформулируйте определение **функции многих переменных, непрерывной в точке и непрерывной на множестве**. Перечислите свойства функций многих переменных, непрерывных на **компактах**. Можно ли утверждать, что **функция многих переменных, непрерывная в области, ограничена в этой области**? Что называют **точкой разрыва функции** многих переменных? [V]

12. Можно ли утверждать, что если все **частные производные первого порядка** функции непрерывны в точке, то **функция дифференцируема в этой точке**? В каком случае **смешанные производные** такой функции не зависят от порядка дифференцирования? Является ли дважды дифференцируемая в точке функция многих переменных **непрерывной дифференцируемой функцией** в этой точке? [V]

13. Что называют **неявной функцией**? Сформулируйте теорему о **неявной функции**. [II], [V]

14. Определите, для каких из следующих функций **неопределенный интеграл** относят к **неберущимся интегралам**: $\sin^2 x$, $\sin(x^2)$, $\frac{\cos x}{x}$, xe^{-x^2} , e^{-x^2} , $\ln x$, $\frac{1}{\ln x}$. [VI]

15. Найдите **градиент функции** $f(x, y) = 2x^2 + 3y$ в точке $(1; 1)$ и **производную** этой функции в точке $(1; 1)$ по **направлению вектора** $l = 3i - 4j$. Изобразите **линии уровня** этой функции. Напишите уравнения **касательной плоскости** и **нормали к поверхности** $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 5$ в точке $(1; -1; 1)$. [V]

16. Можно ли использовать **формулу Ньютона — Лейбница** для вычисления **определенного интеграла** с нижним a и верхним b пределами интегрирования от подынте-

графальной функции $f(x)$, если известна первообразная $F(x)$ этой функции в полуинтервалах $[a, c)$ и $(c, b]$? [VI]

17. Сформулируйте и запишите определение предела интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. [VI]

18. Что называют интегралом Римана? Приведите пример интегрируемой по Риману функции и пример неинтегрируемой функции. [VI]

19. Что называют квадратуемой плоской фигурой и кубируемым телом? Выразите при помощи определенного интеграла: а) длину плоской гладкой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$; б) площадь плоской фигуры D , заданной неравенствами $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$; в) объем тела и площадь поверхности, образованных вращением вокруг оси абсцисс графика дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. [VI]

20. Опишите суть основного подхода к проблеме численного интегрирования. Что называют квадратурной формулой и погрешностью квадратурной формулы? [VI]

21. Является ли кусочно гладкая плоская замкнутая кривая спрямляемой? [II]

22. Запишите канонические уравнения эллипса с большой a и малой b полуосями, гиперболы с действительной a и мнимой b полуосями и параболы с фокальным параметром p , прямого кругового конуса, трехосного эллипсоида и гиперболического параболоида. [III]

23. Какие геометрические векторы называют коллинеарными, компланарными, сонаправленными, противоположно направленными, ортогональными? Укажите какой-либо базис в V_3 . Какова ориентация этого базиса? [III]

24. Сформулируйте основные свойства скалярного произведения, векторного произведения и смешанного произведения. Что произойдет с каждым из этих произведений, если поменять местами два сомножителя? Запишите формулы

вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений в **ортонормированном базисе**. Как связаны **площадь** параллелограмма и **объем** параллелепипеда с векторным и смешанным произведениями векторов? [III]

25. Как вычислить **определитель третьего порядка** с помощью **правила Саррюса**? Как вычислить **смешанное произведение** трех векторов, заданных своими **координатами** в **ортонормированном базисе**? [III]

26. Перечислите основные типы **обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)** первого порядка. Как интегрируют эти уравнения? [VIII]

27. Сформулируйте **теорему Коши существования и единственности решения ОДУ** первого порядка. Сравните ее с **теоремой Коши существования и единственности решения ОДУ** первого порядка, не разрешенного относительно производной. [VIII]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания, теоремы без доказательства
- \approx — знак приближенного равенства
- \equiv — знак тождественного равенства
- \emptyset — пустое множество **I-1.1**
- $a \in A$ — a принадлежит множеству A **I-1.1**
- $a \notin A$ — a не принадлежит множеству A **I-1.1**
- $\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c **I-1.1**
- $\{x: P\}$ — множество, состоящее из элементов x , обладающих свойством P **I-1.1**
- $A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B **I-1.2**
- $A \setminus B$ — разность множеств A и B **I-1.4**
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B **I-1.4**
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B **I-1.4**
- \mathbb{R} — множество действительных чисел **I-1.3**
- \mathbb{R}^n — n -мерное линейное арифметическое пространство **IV**
- $\text{int } M$ — внутренность (множество внутренних точек) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ **1.2**
- \forall — квантор всеобщности ($\forall x$ — для любого x) **I-1.5**
- \exists — квантор существования ($\exists x$ — существует x) **I-1.5**
- $f: X \rightarrow Y$ — отображение f множества X в (на) множество Y **I-2.1**
- $f(G)$ — образ множества G при отображении f **I-2.1**

- $f^{-1}(Y)$ — прообраз множества Y при отображении f **I-2.1**
- $\sum_{k=1}^N a_k$ — сумма слагаемых a_1, a_2, \dots, a_N **I-2.6**
- $\prod_{k=1}^N a_k$ — произведение N сомножителей a_1, a_2, \dots, a_N **I-2.6**
- $k \in \overline{1, N}$ — число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до N включительно **I-2.6**
- w и $|w|$ — геометрический вектор и его длина **III**
- $ab, (a, b)$ — скалярное произведение векторов a и b **III**
- $a \times b$ — векторное произведение векторов a и b **III**
- abc — смешанное произведение векторов a, b и c **III**
- (a_{ij}) — матрица типа $m \times n$, составленная из элементов a_{ij} **III**
- I_n, E — единичная матрица порядка n **III**
- 0 — нулевой вектор в \mathbb{R}^n **IV**
- A^T — матрица, транспонированная к матрице A **III**
- A^{-1} — матрица, обратная к матрице A **III**
- $\det A, |A|$ — определитель квадратной матрицы A **III**
- $\text{Rg } A$ — ранг матрицы A **III**
- $\|a\|$ — евклидова норма элемента a в евклидовом пространстве **IV**
- $o(h)$ — величина более высокого порядка малости, чем h **I-10.1**
- $\delta(x)$ — δ -функция Дирака **XII**
- a^* — число, комплексно сопряженное к числу a **I-4.3**
- $d(T)$ — диаметр разбиения T **1.2**
- \int — знак неопределенного, определенного, криволинейного интегралов **VI, 5.1**

$\iint_D f(x, y) dx dy$ — двойной интеграл от функции $f(x, y)$ с областью интегрирования D **1.2**

$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ — тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ с областью интегрирования D **2.2**

$\oint_L f(\mathbf{r}) ds$ — криволинейный интеграл по замкнутому контуру L **5.3**

$\iint_S f(x, y, z) dS$ — поверхностный интеграл по поверхности S **6.1**

$\oiint_S f(x, y, z) dS$ — поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S **6.1**

$\text{grad } u(M)$ — градиент скалярного поля $u(M)$ в точке M **7.2**

$\text{div } \mathbf{a}(M)$ — дивергенция векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M **7.4**

$\text{rot } \mathbf{a}(M)$ — ротор векторного поля $\mathbf{a}(M)$ в точке M **7.4**

∇ — оператор Гамильтона **8.1**

∇^2 — оператор Лапласа **8.3**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a <i>A a</i>	а	N n <i>N n</i>	эн
B b <i>B b</i>	бэ	O o <i>O o</i>	о
C c <i>C c</i>	цэ	P p <i>P p</i>	пэ
D d <i>D d</i>	дэ	Q q <i>Q q</i>	ку
E e <i>E e</i>	е	R r <i>R r</i>	эр
F f <i>F f</i>	эф	S s <i>S s</i>	эс
G g <i>G g</i>	же	T t <i>T t</i>	тэ
H h <i>H h</i>	аш	U u <i>U u</i>	у
I i <i>I i</i>	и	V v <i>V v</i>	вэ
J j <i>J j</i>	йот	W w <i>W w</i>	дубль-вэ
K k <i>K k</i>	ка	X x <i>X x</i>	икс
L l <i>L l</i>	эль	Y y <i>Y y</i>	игрек
M m <i>M m</i>	эм	Z z <i>Z z</i>	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	лямбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о площади *криволинейной трапеции* привела нас к понятию определенного интеграла [VI]. Рассмотрим задачи, которые приводят к понятию *двойного интеграла*.

Задача об объеме цилиндрического тела. Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим тело Q , ограниченное снизу ограниченной замкнутой областью D на координатной плоскости xOy , сбоку *цилиндрической поверхностью* с образующими, параллельными оси Oz , и сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x; y) \in D$ (рис. 1.1). Тело Q описанного вида обычно называют *z -цилиндрическим*.

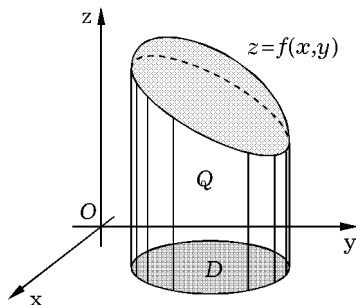


Рис. 1.1

Объем V рассматриваемого тела Q естественно искать следующим путем. Разобьем основание D произвольными кривыми на n *частичных областей* D_i , не имеющих общих внутрен-

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Перейдем к рассмотрению интегралов от функций трех переменных, называемых тройными. Эти интегралы, как и *двойные интегралы*, имеют широкое применение при решении различных геометрических, физических и технических задач. Поскольку между двойными и тройными интегралами существует почти полная аналогия, то далее будем обычно приводить лишь формулировки утверждений, так как доказательства этих утверждений легко получить, адаптируя доказательства аналогичных утверждений для двойного интеграла.

2.1. Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое материальное тело, занимающее в пространстве замкнутую область Q и имеющее неоднородное распределение массы по своему объему. Это распределение в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ характеризуется функцией плотности $\rho(x, y, z)$ трех переменных. Для нахождения массы m материального тела разобьем замкнутую область Q произвольным образом на n *частичных областей* Q_i , $i = \overline{1, n}$, объем каждой из которых обозначим ΔV_i . Выберем в каждой *частичной области* Q_i произвольную точку $(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \in Q_i$, $i = \overline{1, n}$, и приближенно примем, что в пределах Q_i плотность тела постоянна и равна $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда масса *частичной области* Q_i будет $\Delta m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$, а для массы всего тела получим приближенное равенство

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i. \quad (2.1)$$

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойные и тройные интегралы очень похожи, и их можно объединить в одной теории, распространив ее на случай линейного арифметического пространства произвольной размерности. Такая теория не только подчеркивает близость двойных и тройных интегралов, но и в некоторых случаях полезна при решении прикладных задач.

3.1. Мера Жордана

Пусть два набора чисел a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i \leq b_i$, $i = \overline{1, n}$. Множество

$$X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] = \\ = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \in [a_i, b_i], i = \overline{1, n} \}$$

будем называть ***n*-мерным промежутком** или просто ***промежутком***. При $n = 1$ промежутком является отрезок числовой прямой, при $n = 2$ — прямоугольник на плоскости, а при $n = 3$ — прямоугольный параллелепипед в трехмерном пространстве.

Обобщая понятие длины отрезка, площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда, **меру *n*-мерного промежутка** $X = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ определим как действительное число

$$\mu(X) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \quad (3.1)$$

Заметим, что если промежуток X является вырожденным, т.е. равенство $a_i = b_i$ верно по крайней мере для одного индекса i , то мера такого промежутка равна нулю.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотренный в предыдущих главах подход к вычислению *кратных интегралов* может оказаться нерациональным, если при сведении их к повторным интегралам подынтегральная функция будет слишком сложной. Этот подход вообще не применим, если хотя бы один из повторных интегралов неберущийся или же подынтегральная функция задана табличным способом. В таких ситуациях, как и в аналогичных ситуациях для определенного интеграла, прибегают к приемам численного интегрирования. В этой главе обсудим особенности численного интегрирования для кратных интегралов.

4.1. Использование одномерных квадратурных формул

Трудоемкость вычисления *кратного интеграла* с помощью *численного интегрирования* зависит от сложности подынтегральной функции и *области интегрирования* и в сильной степени — от *кратности интеграла*. Сначала рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда область интегрирования ограничена координатными поверхностями какой-либо системы координат или же может быть преобразована в такую область заменой переменных.

Если область интегрирования кратного интеграла является n -мерным промежутком (для *двойного интеграла* это соответствует прямоугольнику, а для *тройного интеграла* — прямоугольному параллелепипеду), то каждое переменное интегрирования изменяется независимо, в пределах фиксированного отрезка. Поэтому в *повторном интеграле* пределы интегрирования всех внутренних определенных интегралов будут

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Криволинейный интеграл первого рода

Используя понятие *длины кривой*, а также формулы для ее вычисления при различных способах задания кривой [VI], можно ввести понятие интеграла вдоль спрямляемой (в частности, гладкой или кусочно гладкой) кривой так же, как вдоль прямолинейного отрезка.

Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеется непрерывная спрямляемая кривая AB (рис. 5.1), в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x, y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i , а максимальную их этих длин — через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i(x_i, y_i)$.

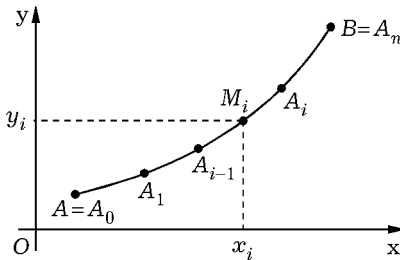


Рис. 5.1

Отметим, что подобное разбиение можно построить и в случае замкнутой кривой, если за точку A_0 , совпадающую в этом случае с A_n , взять любую точку кривой AB , а остальные точки $A_i, i = \overline{1, n-1}$, расположить в соответствии с выбранным направлением на этой замкнутой кривой.

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. О задании поверхности в пространстве

Поверхность в пространстве может быть задана различными способами [V]. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат $Oxyz$ с ортонормированным базисом i, j, k .

Поверхность в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x, y), \quad (x; y) \in G \subset \mathbb{R}^2. \quad (6.1)$$

Аналогичны случаи, отличающиеся другим сочетанием переменных:

$$x = f(y, z), \quad (y; z) \in G_1 \subset \mathbb{R}^2, \quad (6.2)$$

или

$$y = f(x, z), \quad (x; z) \in G_2 \subset \mathbb{R}^2. \quad (6.3)$$

В этих трех случаях поверхность называют **явно заданной поверхностью**.

Поверхность в пространстве может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (6.4)$$

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют **неявно заданной поверхностью**. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (6.5)$$

задает в пространстве \mathbb{R}^3 поверхность, представляющую собой сферу радиуса R с центром в начале координат.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Если на некотором множестве D в пространстве (области, кривой, поверхности) задано отображение, которое каждой точке множества ставит в соответствие значение какой-либо величины, то такое отображение называют *полем*. В случае скалярной величины говорят о *скалярном поле*, а в случае векторной величины — о *векторном поле*. Существуют поля и других типов, но они здесь не рассматриваются.

Скалярные и векторные поля — это функции точки и потому не связаны с какой-либо системой координат. Зафиксировав прямоугольную систему координат, мы можем представлять точки пространства упорядоченными тройками их координат, а скалярные и векторные поля — функциями многих переменных. Такое представление позволяет при изучении полей использовать аппарат дифференциального исчисления. В то же время не следует ставить знак равенства между терминами „поле“ (скалярное или векторное) и „функция многих переменных“. Понятие поля позволяет наиболее естественно характеризовать и описывать те свойства реальных объектов, которые не зависят от выбора системы координат: реальные физические свойства и не должны быть связаны с какой-либо системой координат.

7.1. Скалярное поле

Как уже было сказано, *скалярное поле*, заданное на множестве D , — это отображение с областью определения D , значениями которого являются действительные числа (значения скалярной величины). В качестве множества D , как правило, рассматривают некоторую пространственную область, поверхность или кривую.

8. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Под векторным анализом обычно понимают раздел математики, в котором средствами дифференциального и интегрального исчисления изучают *скалярные и векторные поля*. Одна из особенностей векторного анализа состоит в том, что *градиент скалярного поля, дивергенцию и ротор векторного поля*, а также производные по направлению функций, задающих эти поля, можно представить при помощи одного оператора.

8.1. Оператор Гамильтона

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с правым ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Рассмотрим символический векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (8.1)$$

который в 1853 г. ввел В.Р. Гамильтон*, придумавший для него и символ ∇ в виде перевернутой греческой буквы Δ (дельта). Гамильтон называл символ ∇ словом „атлед“ (слово „дельта“, прочитанное наоборот), однако позже английские ученые, в том числе О. Хевисайд**, стали называть этот символ словом „набла“ из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы, а символический оператор (8.1) получил название *оператора Гамильтона*, или *оператора набла*.

Пусть в выбранной системе координат $Ox_1x_2x_3$ скалярное поле $u(M)$, $M \in D$, представлено дифференцируемой скаляр-

*В.Р. Гамильтон (1805–1865) — ирландский математик и механик.

**О. Хевисайд (1850–1925) — английский физик и инженер.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2 т. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981. 448 с.

Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.

Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1982. 256 с.

Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы): В 2 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1980. 296 с.

Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1980. 448 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Продолжение курса / Под ред. *А.Н. Тихонова*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 358 с.

Казанджан Э.П. Интегральное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 60 с.

Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики: Прикладные вопросы анализа. М.: Высш. шк., 1976. 390 с.

- Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.
- Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.
- Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Пер. с нем. и англ.: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1970. 672 с.
- Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.
- Мышкис А.Д.* Математика для втузов: Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.
- Наньев В.С., Феоктистов В.В., Галкин С.В.* Дополнительные главы высшей математики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 56 с.
- Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1985. 560 с.
- Седов Л.И.* Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
- Толстов Г.П.* Элементы математического анализа: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1974. 472 с.
- Турчак Л.И.* Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.
- Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
- Фиттенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.
- Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972. 622 с.

Справочные издания и монографии

- Александрова Н.В.* Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.
- Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф.* Математический словарь высшей школы / Под ред. Ю.С. Богданова. Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.
- Герасимович А.И., Рысюк Н.А.* Математический анализ: Справочное пособие для студентов втузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Вышэйш. шк., 1989. 288 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища шк., 1985. 528 с.

Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров*. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 320 с.

Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 256 с.

Задачники

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. *Б.П. Демидовича*. М.: Интеграл-пресс, 1997. 416 с.

Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш. шк., 1994. 206 с.

Сборник задач по математике для вузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*. М.: Наука, 1986. 368 с.

Сборник задач по механике сплошной среды: В 2 т. / Под ред. *М.Э. Эглит*. М.: Московский Лицей, 1996. Т. 1. 396 с.; Т. 2. 394 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность интеграла двойного

32

-- кратного 181

-- определенного VI, 49

-- тройного 103

- меры 155

- площади 19

Астроида VI, 261

Бета-функция VI

Биекция I-74

Вектор нормальный плоскости III

Величина случайная XVI

-- двумерная XVI

-- непрерывная XVI

-- одномерная XVI

Выборка XVII

Гамма-функция VI

Геликоид прямой V, 333

Градиент скалярного поля 381

Граница поверхности 321

Диаметр разбиения 20, 80, 99, 165

Дивергенция 402

Дисперсия XVI

- выборочная XVII, 243

-- исправленная XVII, 243

Дифференциал длины дуги плоской
кривой II, 258

Длина кривой II

Завихренность 409

Замена переменных 191

Значение узловое 228

- функции среднее 37, 105, 183, 340

Измельчение разбиения 24, 169

Инвариантность площади 19

Интеграл Дарбу верхний VI, 26, 171

-- нижний VI, 26, 171

- двойной 21

- криволинейный второго рода 274

---- общего вида 275

-- первого рода 255

- Лапласа XVI, 243

- линейный 407

- несобственный второго рода 92,
202

-- от неограниченной функции по
ограниченной области 92

-- первого рода 84, 202

-- по неограниченной области 84

-- расходящийся 85, 203

-- сходящийся 85, 203

--- абсолютно 90

- поверхностный второго рода 348

-- первого рода 335

- повторный VI, 40

- Пуассона VI, 88

- Римана кратный 166

- тройной 100

- n -кратный несобственный 202

Интенсивность источника (стока)

401

Интервал доверительный XVII
 Источник векторного поля 400
 Исчерпывание монотонное 84, 201

Колесание функции VI

Компакт I-189, 27
 Контур простой II, 278
 Координаты криволинейные в
 плоской области 65
 --- пространственной области 114
 - полярные обобщенные 76
 - сферические обобщенные 127
 - точки барицентрические XIII, 228
 -- сферические V, 118
 -- цилиндрические V, 118
 Косинус направляющий вектора III,
 347

Край поверхности 321

Кривая плоская II
 - спрямляемая II
 - трансверсальная векторному
 полю 396

Критерий Дарбу 176

- Римана 177
 - существования двойного
 интеграла 26
 -- кратного интеграла 177
 -- тройного интеграла 101

Лапласиан 450

Лемма Дарбу 172
 Лемниската Бернулли II, 262
 Линейность интеграла двойного 30
 -- кратного 180
 -- тройного 102
 Линия векторная 390
 - силовая 390

Линия тока 391
 Лист Мебиуса 326

Мера внешняя 155

- внутренняя 155
 - (Жордана) множества 156
 - промежутка n -мерного 153
 Метод конечных элементов XIII
 - Монте-Карло 238
 - Рунге II, VI, 221
 - статистических испытаний XIII,
 237

Многочлен интерполяционный
 Лагранжа II, 223

Множество (жордановой) меры
 нуль 156

- измеримое (по Жордану) 155
 - объема нуль 98
 - площади нуль 18
 - правильное 183
 - частичное 164
 - элементарное 154

Момент инерции геометрический
 VI, 139

-- осевой 129
 -- относительно оси VI, 128
 --- плоскости VI, 128
 -- полярный 139
 -- центробежный 135
 - статический VI, 130

Монотонность интеграла кратного
 181

- меры 154
 - площади 19

Неотрицательность меры 154

- площади 19

Нормаль к поверхности V, 322

- Область замкнутая квадрируемая
17
- кубирруемая 98
 - многосвязная 293
 - односвязная 293
 - простая 196
 - интегрирования 21, 100
 - правильная 46
 - многосвязная 292
 - объемно односвязная 364
 - односвязная 292
 - поверхностно односвязная 362
 - правильная 105
 - частичная 20, 79, 328
 - z -цилиндрическая 105
- Объединение разбиений 170
- Объем выборки XVII
- тела VI, 98
- Ожидание математическое XVI
- Оператор Гамильтона 438
- Лапласа 450
 - набла 438
- Операция дифференциальная
- второго порядка 449
 - первого порядка 449
- Определение вероятности
- геометрическое XVI
- Ось тела центральная 133
- Отображение обратное I-75, 62
- Оценка XVII
- П**араметр кривой натуральный II
- Параметры Ламе 467
- Пластина 138
- Плоскость касательная V, 322
- тела центральная 132
- Плотность поверхностная 138
- распределения вероятностей XVI
- Площадь поверхности 80
- фигуры плоской VI, 17
- Поверхность векторная 396
- гладкая V, 322
 - двусторонняя 324
 - заданная неявно 319
 - параметрически 320
 - явно 319
 - замкнутая 321
 - квадрируемая 80
 - координатная 114
 - односторонняя 324
 - простая 321
 - цилиндрическая III, 15
- Поле 375
- векторное 375
 - безвихревое 417
 - бесциркуляционное 417
 - двумерное 384
 - дифференцируемое 389
 - лапласово 423
 - неоднородное 384
 - непрерывное 389
 - нестационарное 384
 - одномерное 384
 - однородное 384
 - осевое 387
 - осесимметричное 387
 - плоское 385
 - плоскопараллельное 385
 - потенциальное 417
 - силовое 388
 - соленоидальное 421
 - стационарное 384
 - трехмерное 385
 - центральное 388
 - двумерное 377
 - неоднородное 376

- Поле однородное 376
- скалярное 375
 - дифференцируемое 380
 - непрерывное 380
 - нестационарное 376
 - одномерное 378
 - осевое 378
 - осесимметричное 378
 - плоское 377
 - стационарное 377
 - центральное 378
 - трехмерное 377
- Порядок точности квадратурной формулы VI
- кубатурной формулы 221
- Постоянная циклическая 312
- Потенциал векторный 430
- (скалярный) 417
- Поток векторного поля 398
- Правило цепное V
- Производная скалярного поля по направлению 381
- Промежуток 153
- n -мерный 153
- Р**азбиение 20, 79, 328
- множества 164
 - отрезка VI, 40
- Распределение равномерное XVI, 238
- Расстановка пределов интегрирования 108
- Расстояние между множествами IX, 171
- Ротор 410
- С**реднее выборочное XVII, 238
- Сток векторного поля 400
- Сторона поверхности 327
- Сумма Дарбу верхняя VI, 24
- нижняя VI, 24
 - интегральная 165
- Т**ело VI, 98
- кубируемое VI, 98
 - z -цилиндрическое 15
- Теорема Гаусса 454
- об обратной функции V
 - оценке интеграла двойного 35
 - по модулю 35
 - тройного 104
 - по модулю 103
 - кратного интеграла 182
 - по модулю 182
 - о неявной функции V, 327
 - среднем 340
 - значения для интеграла двойного 36
 - кратного 183
 - тройного 104
 - Остроградского — Гаусса 406
 - Стокса 416
 - центральная предельная XVI, 242
- Тетраэдр 109
- Толщина пластины 138
- Тор V, 362
- Точка кривой начальная II
- поверхности внутренняя 321
 - неособая 322
 - особая 322
 - регулярная V, 322
- Трапеция криволинейная VI, 15
- Триангуляция замкнутой области 228
- многоугольника V, 227
- Трубка векторная 397

- У**гол телесный 400
 Узел интерполяции II
 – квадратурной формулы VI
 – кубатурной формулы 220
 Уравнение Лапласа XII, 423, 451
 Уравнения Максвелла XII, 443
 – поверхности параметрические V, 320
 Уровень доверия XVII, 243
 Условие Липшица I-208, VIII
- Ф**игура квадратуемая VI, 17
 Формула Грина вторая 453
 -- для многосвязной области 293
 --- односвязной области 288
 -- первая 453
 – квадратурная Гаусса VI
 – конечных приращений II
 – кубатурная 220
 – Ньютона — Лейбница для криволинейного интеграла 299
 – Остроградского — Гаусса 365
 – парабол VI
- Формула Симпсона VI, 213
 – средних VI
 – Стокса 356
 – трапеций VI
 Функция гармоническая XII, 423
 – Дирихле I-107, 23
 – интегрируемая 21, 99
 -- (по Риману) 165
 – распределения вероятностей XVI
 – формы конечного элемента XIII, 230
- Ц**ентр масс VI, 130
 -- геометрический 140
 Циркуляция векторного поля 407
- Ч**исло псевдослучайное XX
- Э**лемент объема 116
 – площади в криволинейных координатах 68, 330
 -- поверхности 330
- Я**кобиан V, 62, 113

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	11
1. Двойные интегралы	15
1.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла	15
1.2. Определение двойного интеграла	17
1.3. Условия существования двойного интеграла	24
1.4. Классы интегрируемых функций	27
1.5. Свойства двойного интеграла	29
1.6. Теоремы о среднем значении для двойного интеграла	36
1.7. Вычисление двойного интеграла	40
1.8. Криволинейные координаты на плоскости	62
1.9. Замена переменных в двойном интеграле	65
1.10. Площадь поверхности	79
1.11. Несобственные двойные интегралы	84
Вопросы и задачи	93
2. Тройные интегралы	97
2.1. Задача о вычислении массы тела	97
2.2. Определение тройного интеграла	98
2.3. Свойства тройного интеграла	102
2.4. Вычисление тройного интеграла	105
2.5. Замена переменных в тройном интеграле	113
2.6. Цилиндрические и сферические координаты	118
2.7. Приложения двойных и тройных интегралов	128
Вопросы и задачи	149
3. Кратные интегралы	153
3.1. Мера Жордана	153
3.2. Интеграл по измеримому множеству	164
3.3. Суммы Дарбу и критерии интегрируемости функции	168
3.4. Свойства интегрируемых функций и кратного инте- грала	179
3.5. Сведение кратного интеграла к повторному	183
3.6. Замена переменных в кратном интеграле	190

3.7.	Кратные несобственные интегралы	201
	Вопросы и задачи	205
4.	Численное интегрирование	208
4.1.	Использование одномерных квадратурных формул .	208
4.2.	Кубатурные формулы	219
4.3.	Многомерные кубатурные формулы	231
4.4.	Метод статистических испытаний	237
4.5.	Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло	247
	Вопросы и задачи	253
5.	Криволинейные интегралы	254
5.1.	Криволинейный интеграл первого рода	254
5.2.	Вычисление криволинейного интеграла первого рода	257
5.3.	Механические приложения криволинейного интеграла	
	первого рода	265
5.4.	Криволинейный интеграл второго рода	274
5.5.	Существование и вычисление криволинейного интеграла	
	второго рода	279
5.6.	Свойства криволинейного интеграла второго рода .	285
5.7.	Формула Грина	288
5.8.	Условия независимости криволинейного интеграла от	
	пути интегрирования	296
5.9.	Вычисление криволинейного интеграла от полного диф-	
	ференциала	306
Д.5.1.	Криволинейный интеграл в многосвязной области . .	310
	Вопросы и задачи	314
6.	Поверхностные интегралы	319
6.1.	О задании поверхности в пространстве	319
6.2.	Односторонние и двусторонние поверхности	323
6.3.	Площадь поверхности	327
6.4.	Поверхностный интеграл первого рода	334
6.5.	Приложения поверхностного интеграла первого рода	341
6.6.	Поверхностный интеграл второго рода	347
6.7.	Физический смысл поверхностного интеграла второго	
	рода	353
6.8.	Формула Стокса	356
6.9.	Условия независимости криволинейного интеграла вто-	
	рого рода от пути интегрирования в пространстве .	362
6.10.	Формула Остроградского — Гаусса	364
	Вопросы и задачи	371

7. Элементы теории поля	375
7.1. Скалярное поле	375
7.2. Градиент скалярного поля	380
7.3. Векторное поле	383
7.4. Векторные линии	390
7.5. Поток векторного поля и дивергенция	397
7.6. Циркуляция векторного поля и ротор	407
7.7. Простейшие типы векторных полей	417
Д.7.1. Безвихревое поле в многосвязной области	424
Д.7.2. Векторный потенциал соленоидального поля	430
Вопросы и задачи	435
8. Основы векторного анализа	438
8.1. Оператор Гамильтона	438
8.2. Свойства оператора Гамильтона	444
8.3. Дифференциальные операции второго порядка	448
8.4. Интегральные формулы	452
8.5. Обратная задача теории поля	463
Д.8.1. Дифференциальные операции в ортогональных криво- линейных координатах	465
Вопросы и задачи	479
Список рекомендуемой литературы	481
Предметный указатель	484

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск VII**

**Гаврилов Валерий Рудольфович
Иванова Елена Евгеньевна
Морозова Валентина Дмитриевна**

**КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЫ.
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Редактор *Н.Г. Ковалевская*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

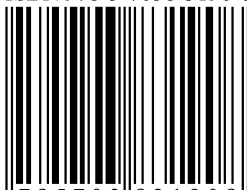
Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.08 г.

Подписано в печать 20.05.08. Формат 60×88/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 31,0. Уч.-изд. л. 28,60.
Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-7038-3190-8



9 785703 831908