МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$\int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \int\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, dS$$

VII

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова,
В.Д. Морозова

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Математика в техническом университете

Выпуск VII

Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

I. Введение в анализ
II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
III. Аналитическая геометрия
IV. Линейная алгебра
V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
VIII. Дифференциальные уравнения
IX. Ряды
X. Теория функций комплексного переменного
XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
XII. Дифференциальные уравнения математической физики
XIII. Приближенные методы математической физики
XIV. Методы оптимизации
XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
XVI. Теория вероятностей
XVII. Математическая статистика
XVIII. Случайные процессы
XIX. Дискретная математика
XX. Исследование операций
XXI. Математическое моделирование в технике

В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, исправленное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2008

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161.1
Г12

Рецензенты: проф. Д.В. Георгиевский, проф. А.П. Фаворский

Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д.

Г12 Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. –496 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).

ISBN 978-5-7038-3190-8 (Вып. VII)
ISBN 978-5-7038-3022-2

Книга является седьмым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Она знакомит читателя с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами и с методами их вычисления. В ней уделено внимание приложениям этих типов интегралов, приведены примеры физического, механического и технического содержания. В заключительных главах изложены элементы теории поля и векторного анализа.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 112. Табл. 5. Библиогр. 46 назв.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161.1

© В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова, 2001; 2008, с изменениями

© Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2001; 2008, с изменениями

© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001; 2008, с изменениями

ISBN 978-5-7038-3190-8 (Вып. VII)
ISBN 978-5-7038-3022-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Эти интегралы приходится вычислять по двумерным, трехмерным (и в общем случае многомерным) областям, по кривым и поверхностям. Такие интегралы играют важную роль при исследовании скалярных и векторных полей, задаваемых в пространстве действительными и векторными функциями векторного аргумента, составляющими предмет изучения теории поля и векторного анализа.

Эта книга является седьмым выпуском серии учебников „Математика в техническом университете“. При отборе и изложении материала авторы старались учесть существующие различия в его объеме, характерные для программ подготовки по различным инженерным специальностям.

Содержание книги тесно связано с материалом предшествующих выпусков: дифференциальным и интегральным исчислением функций одного действительного переменного, аналитической геометрией и линейной алгеброй. При ссылке в тексте на конкретный выпуск этой серии учебников его номер указан римской цифрой. Например, запись [I-2.4] означает ссылку на четвертый параграф второй главы первого выпуска. Ссылки в пределах этой книги набраны прямым полужирным шрифтом. Например, ссылка (см. **2.1**) указывает на первый параграф второй главы, а (см. **Д.7.2**) отсылает ко второму дополнению главы 7. Определения, теоремы, замечания, примеры, формулы, рисунки и т.п. имеют двойную нумерацию. Например, теорема 1.2 — это вторая теорема в главе 1, (2.1) — первая формула в главе 2, рис. 7.3 — третий рисунок в главе 7.

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в первом выпуске серии. В перечне основных обозначений данного выпуска наряду с их краткой расшифровкой указаны ссылки на разделы этого и других выпусков серии, в которых можно найти их более подробное объяснение. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все термины, выделенные в тексте ***полужирным курсивом***, с указанием страницы, где они определены или описаны. Выделение термина (при его первом упоминании в каждом параграфе) *светлым курсивом* означает, что в этом параграфе он отнесен к ключевым словам и читателю должно быть известно его значение. Уточнить смысл термина можно, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу, на которой используемый термин определен или описан. Если термин введен в другом выпуске, то его номер в предметном указателе обозначен римской цифрой перед номером страницы (например, I-217). Светлым курсивом даны ссылки на страницы этого и других выпусков, указывающие некоторые пояснения или уточнения термина. Такое построение предметного указателя связывает материал всех выпусков серии „Математика в техническом университете“ единым справочным аппаратом, удобным для поиска нужной информации.

Перед чтением этой книги предлагаем в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. В конце каждого задания указан номер того выпуска, в котором при возникновении затруднений можно найти все необходимые сведения. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным** шрифтом, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в ее предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Запишите представления **множеств целых** $\mathbb{Z}$ и **рациональных** $\mathbb{Q}$ **чисел** при помощи множества $\mathbb{N}$ **натуральных чисел**. Что является **элементом декартова произведения** $\mathbb{R}^2$ двух множеств $\mathbb{R}$ **действительных чисел**? Что такое **объединение**, **пересечение** и **разность множеств**? [I]

2. Убедитесь, что если для **образов** $Y_1 \subset Y$ и $Y_2 \subset Y$ **отображения** $f\colon X \to Y$ справедливо включение $Y_1 \subset Y_2$, то для их **прообразов** $X_1 = f^{-1}(Y_1) \subset X$ и $X_2 = f^{-1}(Y_2) \subset X$ справедливо включение $X_1 \subset X_2$. [I]

3. Перечислите свойства **абсолютной величины** (**модуля**) числа. Запишите **неравенство треугольника**. [I]

4. Каков ход доказательства по **методу математической индукции**? Что понимают под **рекуррентным соотношением**? [I]

5. Каковы свойства **точных верхней** и **нижней граней ограниченного множества** точек **числовой прямой**? [I]

6. Что называют **ε-окрестностью точки** в $\mathbb{R}^n$? Является ли **граничная точка множества** его **предельной точкой**? Приведите пример множества в $\mathbb{R}^n$, не имеющего ни одной **внутренней точки**. Что называют **диаметром**, **границей** и **внутренностью множества**? Какие множества называют **открытыми**, **замкнутыми**, **компактными** (**компактами**), **линейно связными**? [I], [V]

7. Изобразите на плоскости с заданной **прямоугольной декартовой системой координат** Oxy множество точек $D = \left\{(x;y)\colon x \in (-1, 1],\ \sqrt{4-x^2} \leqslant y < 4 - x^2\right\}$. [I], [III]

8. Каков смысл символов o и O при сравнении бесконечно малых? Напишите **формулу Тейлора** с **остаточным членом в форме Пеано** и **в форме Лагранжа**. [I], [II]

9. Сформулируйте и запишите определение **предела действительной функции действительного переменного** в

заданной точке. Перечислите свойства функций, имеющих в точке **конечный предел**. [I]

10. Сформулируйте и запишите определение **предела векторной функции многих переменных в точке**. Что можно сказать о пределах в той же точке ее **координатных функций**? [V]

11. Сформулируйте определение **функции многих переменных, непрерывной в точке** и **непрерывной на множестве**. Перечислите свойства функций многих переменных, непрерывных на **компактах**. Можно ли утверждать, что **функция многих переменных**, непрерывная в области, **ограничена в** этой **области**? Что называют **точкой разрыва функции** многих переменных? [V]

12. Можно ли утверждать, что если все **частные производные первого порядка** функции непрерывны в точке, то **функция дифференцируема в** этой **точке**? В каком случае **смешанные производные** такой функции не зависят от порядка дифференцирования? Является ли дважды дифференцируемая в точке функция многих переменных **непрерывной дифференцируемой функцией** в этой точке? [V]

13. Что называют **неявной функцией**? Сформулируйте **теорему о неявной функции**. [II], [V]

14. Определите, для каких из следующих функций **неопределенный интеграл** относят к **неберущимся интегралам**: $\sin^2 x$, $\sin(x^2)$, $\dfrac{\cos x}{x}$, xe^{-x^2}, e^{-x^2}, $\ln x$, $\dfrac{1}{\ln x}$. [VI]

15. Найдите **градиент функции** $f(x,y) = 2x^2 + 3y$ в точке $(1;1)$ и **производную** этой функции в точке $(1;1)$ **по направлению вектора** $\boldsymbol{l} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$. Изобразите **линии уровня** этой функции. Напишите уравнения **касательной плоскости** и **нормали к поверхности** $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 5$ в точке $(1;-1;1)$. [V]

16. Можно ли использовать **формулу Ньютона — Лейбница** для вычисления **определенного интеграла** с **нижним** a и **верхним** b **пределами интегрирования** от **подынте-**

гральной функции $f(x)$, если известна **первообра́зная** $F(x)$ этой функции в **полуинтервалах** $[a, c)$ и $(c, b]$? [VI]

17. Сформулируйте и запишите определение **предела интегральных сумм** функции $f(x)$ на **отрезке** $[a, b]$. [VI]

18. Что называют **интегралом Римана**? Приведите пример **интегрируемой по Риману функции** и пример неинтегрируемой функции. [VI]

19. Что называют **квадрируемой плоской фигурой** и **кубируемым телом**? Выразите при помощи определенного интеграла: а) **длину плоской гладкой кривой**, заданной **параметрическими уравнениями** $x = x(t)$, $y = y(t)$; б) **площадь плоской фигуры** D, заданной неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$; в) **объем тела** и площадь поверхности, образованных вращением вокруг **оси абсцисс графика дифференцируемой на отрезке** $[a, b]$ **функции** $f(x)$. [VI]

20. Опишите суть основного подхода к проблеме **численного интегрирования**. Что называют **квадратурной формулой** и **погрешностью квадратурной формулы**? [VI]

21. Является ли **кусочно гладкая плоская замкнутая кривая спрямляемой**? [II]

22. Запишите **канонические уравнения эллипса** с **большой** a и **малой** b **полуосями**, **гиперболы** с **действительной** a и **мнимой** b **полуосями** и **параболы** с **фокальным параметром** p, **прямого кругового конуса**, **трехосного эллипсоида** и **гиперболического параболоида**. [III]

23. Какие **геометрические векторы** называют **коллинеарными**, **компланарными**, **сонаправленными**, **противоположно направленными**, **ортогональными**? Укажите какой-либо **базис в $\boldsymbol{V}_3$**. Какова **ориентация** этого **базиса**? [III]

24. Сформулируйте основные свойства **скалярного произведения**, **векторного произведения** и **смешанного произведения**. Что произойдет с каждым из этих произведений, если поменять местами два сомножителя? Запишите формулы

вычисления скалярного, векторного и смешанного произведений в **ортонормированном базисе**. Как связаны **площадь** параллелограмма и **объем** параллелепипеда с векторным и смешанным произведениями векторов? [III]

25. Как вычислить **определитель третьего порядка** с помощью **правила Саррюса**? Как вычислить **смешанное произведение** трех векторов, заданных своими **координатами** в **ортонормированном базисе**? [III]

26. Перечислите основные типы **обыкновенных дифференциальных уравнений** (ОДУ) **первого порядка**. Как интегрируют эти уравнения? [VIII]

27. Сформулируйте **теорему Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка**. Сравните ее с **теоремой Коши существования и единственности решения ОДУ первого порядка, не разрешенного относительно производной**. [VIII]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶ — начало и окончание доказательства

— окончание примера, замечания, теоремы без доказательства

$\approx$ — знак приближенного равенства

$\equiv$ — знак тождественного равенства

$\varnothing$ — пустое множество **I-1.1**

$a \in A$ — a принадлежит множеству A **I-1.1**

$a \notin A$ — a не принадлежит множеству A **I-1.1**

$\{a,\ b,\ c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c **I-1.1**

$\{x\colon P\}$ — множество, состоящее из элементов x, обладающих свойством P **I-1.1**

$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B **I-1.2**

$A \setminus B$ — разность множеств A и B **I-1.4**

$A \cup B$ — объединение множеств A и B **I-1.4**

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B **I-1.4**

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел **I-1.3**

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное арифметическое пространство **IV**

$\operatorname{int} M$ — внутренность (множество внутренних точек) множества $M \subset \mathbb{R}^n$ **1.2**

$\forall$ — квантор всеобщности ($\forall x$ — для любого x) **I-1.5**

$\exists$ — квантор существования ($\exists x$ — существует x) **I-1.5**

$f\colon X \to Y$ — отображение f множества X в (на) множество Y **I-2.1**

$f(G)$ — образ множества G при отображении f **I-2.1**

$f^{-1}(Y)$ — прообраз множества Y при отображении f **I-2.1**

$\sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ — сумма слагаемых a_1, a_2, …, a_N **I-2.6**

$\prod\limits_{k=1}^{N} a_k$ — произведение N сомножителей a_1, a_2, …, a_N **I-2.6**

$k = \overline{1, N}$ — число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до N включительно **I-2.6**

$\boldsymbol{w}$ и $|\boldsymbol{w}|$ — геометрический вектор и его длина **III**

$\boldsymbol{ab}$, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **III**

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **III**

$\boldsymbol{abc}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ **III**

(a_{ij}) — матрица типа $m \times n$, составленная из элементов a_{ij} **III**

I_n, E — единичная матрица порядка n **III**

$\mathbf{0}$ — нулевой вектор в $\mathbb{R}^n$ **IV**

$A^{\mathrm{т}}$ — матрица, транспонированная к матрице A **III**

A^{-1} — матрица, обратная к матрице A **III**

$\det A$, $|A|$ — определитель квадратной матрицы A **III**

$\mathrm{Rg}\, A$ — ранг матрицы A **III**

$\|a\|$ — евклидова норма элемента a в евклидовом пространстве **IV**

$o(h)$ — величина более высокого порядка малости, чем h **I-10.1**

$\delta(x)$ — δ-функция Дирака **XII**

a^* — число, комплексно сопряженное к числу a **I-4.3**

$d(T)$ — диаметр разбиения T **1.2**

$\int$ — знак неопределенного, определенного, криволинейного интегралов **VI**, **5.1**

$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ — двойной интеграл от функции $f(x,y)$ с областью интегрирования D **1.2**

$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ — тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ с областью интегрирования D **2.2**

$\oint\limits_L f(\boldsymbol{r})\,ds$ — криволинейный интеграл по замкнутому контуру L **5.3**

$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS$ — поверхностный интеграл по поверхности S **6.1**

$\oiint\limits_S f(x,y,z)\,dS$ — поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S **6.1**

$\operatorname{grad} u(M)$ — градиент скалярного поля $u(M)$ в точке M **7.2**

$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$ — дивергенция векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M **7.4**

$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M)$ — ротор векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$ в точке M **7.4**

∇ — оператор Гамильтона **8.1**

∇^2 — оператор Лапласа **8.3**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
H η	эта	O o	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

Задача о площади *криволинейной трапеции* привела нас к понятию определенного интеграла [VI]. Рассмотрим задачи, которые приводят к понятию *двойного интеграла.*

Задача об объеме цилиндрического тела. Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат Oxyz и рассмотрим тело Q, ограниченное снизу ограниченной замкнутой областью D на координатной плоскости xOy, сбоку *цилиндрической поверхностью* с образующими, параллельными оси Oz, и сверху поверхностью, заданной уравнением $z = f(x, y)$, причем функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x; y) \in D$ (рис. 1.1). Тело Q описанного вида обычно называют ***z-цилиндрическим***.

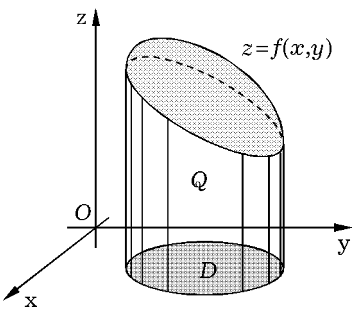

Рис. 1.1

Объем V рассматриваемого тела Q естественно искать следующим путем. Разобьем основание D произвольными кривыми на n *частичных областей* D_i, не имеющих общих внутрен-

2. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Перейдем к рассмотрению интегралов от функций трех переменных, называемых тройными. Эти интегралы, как и *двойные интегралы*, имеют широкое применение при решении различных геометрических, физических и технических задач. Поскольку между двойными и тройными интегралами существует почти полная аналогия, то далее будем обычно приводить лишь формулировки утверждений, так как доказательства этих утверждений легко получить, адаптируя доказательства аналогичных утверждений для двойного интеграла.

2.1. Задача о вычислении массы тела

Пусть дано некоторое материальное тело, занимающее в пространстве замкнутую область Q и имеющее неоднородное распределение массы по своему объему. Это распределение в прямоугольной декартовой системе координат Oxyz характеризуется функцией плотности $\rho(x,y,z)$ трех переменных. Для нахождения массы m материального тела разобьем замкнутую область Q произвольным образом на n *частичных областей* Q_i, $i=\overline{1,n}$, объем каждой из которых обозначим ΔV_i. Выберем в каждой частичной области Q_i произвольную точку $(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\in Q_i$, $i=\overline{1,n}$, и приближенно примем, что в пределах Q_i плотность тела постоянна и равна $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$. Тогда масса частичной области Q_i будет $\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$, а для массы всего тела получим приближенное равенство

$$m\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i. \tag{2.1}$$

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойные и *тройные интегралы* очень похожи, и их можно объединить в одной теории, распространив ее на случай линейного арифметического пространства произвольной размерности. Такая теория не только подчеркивает близость двойных и тройных интегралов, но и в некоторых случаях полезна при решении прикладных задач.

3.1. Мера Жордана

Пусть два набора чисел a_i и b_i удовлетворяют неравенствам $a_i \leqslant b_i$, $i = \overline{1, n}$. Множество

$$X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \\ = \bigl\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_i \in [a_i, b_i],\ i = \overline{1, n} \bigr\}$$

будем называть ***n*-мерным промежутком** или просто **промежутком**. При $n = 1$ промежутком является отрезок числовой прямой, при $n = 2$ — прямоугольник на плоскости, а при $n = 3$ — прямоугольный параллелепипед в трехмерном пространстве.

Обобщая понятие длины отрезка, площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда, **меру *n*-мерного промежутка** $X = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ определим как действительное число

$$\mu(X) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i). \tag{3.1}$$

Заметим, что если промежуток X является вырожденным, т.е. равенство $a_i = b_i$ верно по крайней мере для одного индекса i, то мера такого промежутка равна нулю.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотренный в предыдущих главах подход к вычислению *кратных интегралов* может оказаться нерациональным, если при сведении их к повторным интегралам подынтегральная функция будет слишком сложной. Этот подход вообще не применим, если хотя бы один из повторных интегралов неберущийся или же подынтегральная функция задана табличным способом. В таких ситуациях, как и в аналогичных ситуациях для определенного интеграла, прибегают к приемам численного интегрирования. В этой главе обсудим особенности численного интегрирования для кратных интегралов.

4.1. Использование одномерных квадратурных формул

Трудоемкость вычисления *кратного интеграла* с помощью *численного интегрирования* зависит от сложности подынтегральной функции и *области интегрирования* и в сильной степени — от *кратности интеграла.* Сначала рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда область интегрирования ограничена координатными поверхностями какой-либо системы координат или же может быть преобразована в такую область заменой переменных.

Если область интегрирования кратного интеграла является n-мерным промежутком (для *двойного интеграла* это соответствует прямоугольнику, а для *тройного интеграла* — прямоугольному параллелепипеду), то каждое переменное интегрирования изменяется независимо, в пределах фиксированного отрезка. Поэтому в *повторном интеграле* пределы интегрирования всех внутренних определенных интегралов будут

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5.1. Криволинейный интеграл первого рода

Используя понятие *длины кривой*, а также формулы для ее вычисления при различных способах задания кривой [VI], можно ввести понятие интеграла вдоль спрямляемой (в частности, гладкой или кусочно гладкой) кривой так же, как вдоль прямолинейного отрезка.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с прямоугольной декартовой системой координат Oxy имеется непрерывная спрямляемая кривая AB (рис. 5.1), в точках которой задана действительная функция $f(M) = f(x,y)$. Выберем разбиение $T = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ кривой AB с точками деления $A_0 = A$, A_1, ..., $A_n = B$. Длины элементарных дуг $A_{i-1}A_i$ обозначим через Δs_i, а максимальную их этих длин — через $\lambda = \lambda(T)$. Возьмем на каждой дуге $A_{i-1}A_i$ по точке $M_i(x_i;y_i)$.

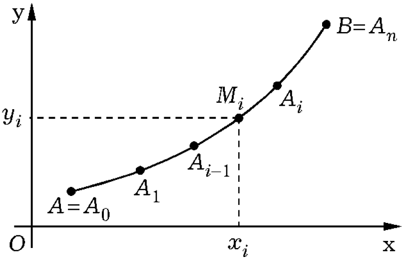

Рис. 5.1

Отметим, что подобное разбиение можно построить и в случае замкнутой кривой, если за точку A_0, совпадающую в этом случае с A_n, взять любую точку кривой AB, а остальные точки A_i, $i = \overline{1, n-1}$, расположить в соответствии с выбранным направлением на этой замкнутой кривой.

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

6.1. О задании поверхности в пространстве

Поверхность в пространстве может быть задана различными способами [V]. Пусть в пространстве фиксирована прямоугольная система координат Oxyz с ортонормированным базисом $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Поверхность в пространстве может быть задана как график некоторой непрерывной функции

$$z = f(x,y), \quad (x;y) \in G \subset \mathbb{R}^2. \tag{6.1}$$

Аналогичны случаи, отличающиеся другим сочетанием переменных:

$$x = f(y,z), \quad (y;z) \in G_1 \subset \mathbb{R}^2, \tag{6.2}$$

или

$$y = f(x,z), \quad (x;z) \in G_2 \subset \mathbb{R}^2. \tag{6.3}$$

В этих трех случаях поверхность называют ***явно заданной поверхностью***.

Поверхность в пространстве может быть задана уравнением

$$F(x,y,z) = 0, \tag{6.4}$$

которое не разрешено относительно какой-либо из переменных. Тогда ее называют ***неявно заданной поверхностью***. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{6.5}$$

задает в пространстве $\mathbb{R}^3$ поверхность, представляющую собой сферу радиуса R с центром в начале координат.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Если на некотором множестве D в пространстве (области, кривой, поверхности) задано отображение, которое каждой точке множества ставит в соответствие значение какой-либо величины, то такое отображение называют ***полем***. В случае скалярной величины говорят о ***скалярном поле***, а в случае векторной величины — о ***векторном поле***. Существуют поля и других типов, но они здесь не рассматриваются.

Скалярные и векторные поля — это функции точки и потому не связаны с какой-либо системой координат. Зафиксировав прямоугольную систему координат, мы можем представлять точки пространства упорядоченными тройками их координат, а скалярные и векторные поля — функциями многих переменных. Такое представление позволяет при изучении полей использовать аппарат дифференциального исчисления. В то же время не следует ставить знак равенства между терминами „поле“ (скалярное или векторное) и „функция многих переменных“. Понятие поля позволяет наиболее естественно характеризовать и описывать те свойства реальных объектов, которые не зависят от выбора системы координат: реальные физические свойства и не должны быть связаны с какой-либо системой координат.

7.1. Скалярное поле

Как уже было сказано, *скалярное поле*, заданное на множестве D, — это отображение с областью определения D, значениями которого являются действительные числа (значения скалярной величины). В качестве множества D, как правило, рассматривают некоторую пространственную область, поверхность или кривую.

8. ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Под векторным анализом обычно понимают раздел математики, в котором средствами дифференциального и интегрального исчислений изучают *скалярные* и *векторные поля*. Одна из особенностей векторного анализа состоит в том, что *градиент скалярного поля*, *дивергенцию* и *ротор векторного поля*, а также производные по направлению функций, задающих эти поля, можно представить при помощи одного оператора.

8.1. Оператор Гамильтона

Выберем в пространстве прямоугольную систему координат $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$ с правым ортонормированным базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Рассмотрим символический векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}, \tag{8.1}$$

который в 1853 г. ввел В.Р. Гамильтон*, придумавший для него и символ ∇ в виде перевернутой греческой буквы Δ (дельта). Гамильтон называл символ ∇ словом „атлед“ (слово „дельта“, прочитанное наоборот), однако позже английские ученые, в том числе О. Хевисайд**, стали называть этот символ словом „на́бла“ из-за сходства с остовом древнеассирийского музыкального инструмента наблы, а символический оператор (8.1) получил название ***оператора Гамильтона***, или ***оператора набла***.

Пусть в выбранной системе координат $O\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2\mathrm{x}_3$ скалярное поле $u(M)$, $M \in D$, представлено дифференцируемой скаляр-

---

*В.Р. Га́мильтон (1805–1865) — ирландский математик и механик.

**О. Хе́висайд (1850–1925) — английский физик и инженер.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: В 2 т. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981. 448 с.

Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.

Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1982. 256 с.

Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.

Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы): В 2 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1980. 296 с.

Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1980. 448 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Продолжение курса / Под ред. *А.Н. Тихонова.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 358 с.

Казанджан Э.П. Интегральное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 60 с.

Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф. Специальный курс высшей математики: Прикладные вопросы анализа. М.: Высш. шк., 1976. 390 с.

Крылов В.И., *Бобков В.В.*, *Монастырный П.И.* Вычислительные методы: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. Т. 2. М.: Высш. шк., 1988. 576 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Пер. с нем. и англ.: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1970. 672 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.

Мышкис А.Д. Математика для втузов: Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.

Наниев В.С., *Феоктистов В.В.*, *Галкин С.В.* Дополнительные главы высшей математики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1990. 56 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1985. 560 с.

Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Толстов Г.П. Элементы математического анализа: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1974. 472 с.

Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.

Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 3. М.: Наука, 1966. 656 с.

Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972. 622 с.

Справочные издания и монографии

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., *Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., *Наумович А.Ф.*, *Наумович Н.Ф.* Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова.* Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Герасимович А.И., *Рысюк Н.А.* Математический анализ: Справочное пособие для студентов втузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Вышэйш. шк., 1989. 288 с.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища шк., 1985. 528 с.

Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 360 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров.* М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 320 с.

Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 256 с.

Задачники

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1979. 400 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. *Б.П.Демидовича.* М.: Интеграл-пресс, 1997. 416 с.

Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш. шк., 1994. 206 с.

Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.* М.: Наука, 1986. 368 с.

Сборник задач по механике сплошной среды: В 2 т. / Под ред. *М.Э. Эглит.* М.: Московский Лицей, 1996. Т. 1. 396 с.; Т. 2. 394 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск VII

Гаврилов Валерий Рудольфович
Иванова Елена Евгеньевна
Морозова Валентина Дмитриевна

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор *Н.Г. Ковалевская*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003961.04.08 от 22.04.08 г.

Подписано в печать 20.05.08. Формат 60×88/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 31,0. Уч.-изд. л. 28,60.
Тираж 1500 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-7038-3190-8

9 785703 831908