МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$\Delta y = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$$

II

Е.Е. Иванова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Математика в техническом университете

Выпуск II

Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

I. Введение в анализ
II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
III. Аналитическая геометрия
IV. Линейная алгебра
V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
VIII. Дифференциальные уравнения
IX. Ряды
X. Теория функций комплексного переменного
XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
XII. Дифференциальные уравнения математической физики
XIII. Приближенные методы математической физики
XIV. Методы оптимизации
XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
XVI. Теория вероятностей
XVII. Математическая статистика
XVIII. Случайные процессы
XIX. Дискретная математика
XX. Исследование операций
XXI. Математическое моделирование в технике

Е.Е. Иванова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, исправленное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2006

УДК 517.2.221(075.8)
ББК 22.161.1
И20

Рецензенты: доц. Л.Н. Каролинская, доц. Н.В. Копченова

Иванова Е.Е.

И20 Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов. – 3-е изд., исправл. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. II).

ISBN 5-7038-2885-6 (Вып. II)
ISBN 5-7038-2484-2

Книга является вторым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Знакомит читателя с понятиями производной и дифференциала, с их использованием при исследовании функций одного переменного. Большое внимание уделено геометрическим приложениям дифференциального исчисления и его применению к решению нелинейных уравнений, интерполированию и численному дифференцированию функций. Приведены примеры и задачи физического, механического и технического содержания.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических вузов. Может быть полезна преподавателям и аспирантам.

Ил. 95. Табл. 3. Библиогр. 48 назв.

УДК 517.2.221(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 5-7038-2885-6 (Вып. II)
ISBN 5-7038-2484-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальное исчисление является одним из основных разделов математического анализа и служит инструментом исследования функций. В этой книге (втором выпуске комплекса учебников „Математика в техническом университете“) предметом исследования будут лишь *функции* одного *действительного переменного*, что и определяет ее название.

Решающие шаги в создании дифференциального исчисления функций одного переменного сделали в XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц. В современном представлении теоретическую основу дифференциального исчисления (и вообще математического анализа) составляет теория пределов. Используемые в этой книге сведения из теории пределов можно найти в изданном в 1996 г. и названном „Введение в анализ“ первом выпуске упомянутого комплекса учебников.

В тексте книги имеются ссылки на другие выпуски комплекса учебников. Такой ссылкой служит номер выпуска. Например, [I, 7.5] означает, что имеется в виду пятый параграф седьмой главы в первом выпуске. Ссылки без римских цифр относятся только к этому, второму, выпуску. Так, (см. **1.2**) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы, а (см. **Д.4.1**) — к первому дополнению четвертой главы этой книги. Ссылки на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (2.1) — первая формула в главе 2, (рис. 1.5) — пятый рисунок в главе 1).

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в [I]. Они помещены в следующем за предисловием перечне основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны глава и параграф, в которых можно найти более подробное объяснение по каждому из обозначений. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, включающий в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) термины, значения которых необходимо знать читателю для понимания излагаемого материала. За каждым термином следует страница, на которой он строго определен или описан и выделен в тексте ***полужирным курсивом***. Если термин введен в другом выпуске, то дана ссылка на этот выпуск (например, III означает ссылку на третий выпуск, а I-312 — на страницу 312 первого выпуска), а также указана курсивом страница предлагаемой книги, на которой имеются некоторые пояснения к этому термину.

Ключевые слова, важные для понимания содержания, при первом упоминании в каждом параграфе выделены *светлым курсивом*. Значение этих слов читатель может уточнить при помощи предметного указателя.

Перед чтением этой книги нужно в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. При возникновении затруднений все необходимые сведения можно найти в [I]. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным** шрифтом, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Какие **числа** принадлежат **множествам** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? Что такое **абсолютное значение** (**модуль**) числа ?

2. Каков ход доказательства по **методу математической индукции** ?

3. Запишите обозначения **промежутков числовой прямой**: **интервала**, **отрезка**, **полуинтервала**, **бесконечных интервала** и **полуинтервала**.

4. Изобразите на числовой прямой **окрестности конечной** и **бесконечной точек расширенной числовой пря-**

мой. В чем отличие этих окрестностей от **проколотых окрестностей** и **полуокрестностей**.

5. Укажите **области определения (существования)** и **значений** и постройте **графики однозначных ветвей многозначной функции** $y^2 = 1/x$.

6. Охарактеризуйте **явный** и **неявный аналитические**, **параметрический**, **графический**, **табличный**, **алгоритмический** и **словесный способы задания функции**. Приведите примеры **составной**, **четной**, **нечетной** и **периодической функций**.

7. Какими свойствами обладают **сходящиеся последовательности**? Сформулируйте **признак Вейерштрасса сходимости последовательности**.

8. Сформулируйте и запишите в символическом виде определения (по Гейне и по Коши) **конечного предела функции в точке** $a \in \mathbb{R}$.

9. Выполните задание 8, когда **аргумент функции** стремится к бесконечной точке расширенной числовой прямой.

10. Приведите пример **функции**, **ограниченной** в некоторой проколотой окрестности точки a, но не имеющей предела в этой точке.

11. Сформулируйте теорему о связи предела функции в точке с **односторонними пределами** функции в этой точке.

12. Определена ли функция $2x^2/\sin x$ в точке $x = 0$? Существует ли в этой точке предел рассматриваемой функции?

13. При каком изменении аргумента функции $\sin x$, $1/x$ являются **бесконечно малыми**, а функции x^2, $\operatorname{ctg} x$ — **бесконечно большими**?

14. Какова связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями? При каких условиях произведение двух функций является бесконечно малой функцией?

15. Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции.

16. Запишите выражения для **первого и второго замечательных пределов**.

17. Какова связь между **приращением функции** и **приращением** ее **аргумента** для **функции**, **непрерывной в точке** и **непрерывной в** этой **точке** только **слева**?

18. При выполнении каких условий **сложная функция** (**суперпозиция функций**) непрерывна в точке?

19. Приведите примеры функций, имеющих **точки**: а) **разрыва первого рода**; б) **устранимого разрыва**; в) **разрыва второго рода**.

20. Приведите примеры **функций, непрерывных в интервале** $(a,\, b)$, но не являющихся **непрерывными на отрезке** $[a,\, b]$. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на отрезке $[a,\, b]$. Сохраняет ли эти свойства функция, непрерывная лишь в интервале $(a,\, b)$?

21. Перечислите **основные элементарные функции**. Какие из этих функций определены и непрерывны на всем **множестве действительных чисел**? Какие функции относят к классу **элементарных функций**? Входят ли в этот класс **гиперболические тангенс и котангенс**?

22. В чем различие между **монотонной** и **строго монотонной** в некотором промежутке функциями? Каковы условия существования в нем непрерывной и строго монотонной функции, **обратной** заданной функции? Изобразите графики **возрастающей**, **убывающей**, **невозрастающей** и **неубывающей** в промежутке **функций**.

23. Приведите примеры бесконечно малых при $x \to a$ функций: а) **одного порядка**; б) **более высокого порядка** малости; в) **первого порядка** малости; г) **несравнимых**; д) **эквивалентных**. Сформулируйте свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

24. Каков смысл символов „o малое“ и „O большое“?

25. Запишите в виде **степенной функции главную часть** функции, бесконечно малой при $x \to a$.

26. Приведите примеры функций, графики которых имеют **вертикальную**, **односторонние** и **двусторонние горизонтальные** и **наклонные асимптоты**.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶ — начало и окончание доказательства

— окончание примера, замечания

$a \in A$, $A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) **I, 1.1**

$A = \{a,\ b,\ c\}$ — множество A состоит из элементов a, b, c **I, 1.1**

$A \subset B$, $B \supset A$ — подмножество A включено в множество B (B включает A) **I, 1.2**

$A \subseteq B$, $B \supseteq A$ — подмножество A включено в множество B или совпадает с ним **I, 1.2**

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел **I, 1.3**

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел **I, 1.3**

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел **I, 1.3**

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел **I, 1.3**

$[a,\ b]$ — отрезок с концами в точках a и b **I, 1.3**

$(a,\ b)$ — интервал с концами в точках a и b **I, 1.3**

$[a,\ b)$, $(a,\ b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b **I, 1.3**

$|x|$ — абсолютное значение числа x **I, 1.3**

$+\infty$, $-\infty$ — бесконечные точки расширенной (пополненной) числовой прямой **I, 1.3**

∞ — объединение бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$ **I, 1.3**

$(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ — бесконечные интервалы **I, 1.3**

$(-\infty,\ a]$, $[b,\ +\infty)$ — бесконечные полуинтервалы **I, 1.3**

$\mathrm{U}(x_0)$ — окрестность точки x_0 **I, 1.3, I, 5.2**

$\mathrm{U}(x_0,\ \varepsilon)$ — ε-окрестность точки x_0 **I, 1.3, I, 5.2**

$A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует B (A — достаточное условие B, а B — необходимое условие A) **I, 1.5**

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны **I, 1.5**

$:\Leftrightarrow$ — утверждение справедливо по определению **I, 1.5**

$\exists x : \ldots$ — существует такое x, что ... **I, 1.5**

$\exists!x : \ldots$ — существует единственное x, такое, что ... **I, 1.5**

$\nexists x : \ldots$ — не существует x, такого, что ... **I, 1.5**

$\forall x$ — для любого x **I, 1.5**

$f\colon X \to Y$ — отображение f множества X в (или на) множество Y **I, 2.1; 10.1**

$y = f(x)$ — переменное y — функция переменного x **I, 2.1**

$f(a) = f(x)\big|_{x=a}$ — значение функции $f(x)$ в точке a **I, 2.1**

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$ **I, 2.3; 11.1**

$M(x,\, y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината) **I, 2.5**

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — сумма n слагаемых $a_1,\, \ldots,\, a_k,\, \ldots,\, a_n$ **I, 2.6**

$\prod\limits_{m=1}^{n} a_m$ — произведение n сомножителей $a_1,\, \ldots,\, a_m,\, \ldots,\, a_n$ **I, 2.6**

$k = \overline{1,\, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества $\mathbb{N}$ от 1 до n включительно **I, 2.6**

$\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ — проколотая окрестность точки a **I, 7**

$\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a,\, \delta)$ — проколотая δ-окрестность точки a **I, 7**

$x \to a$ — переменное x стремится к точке a **I, 7.1**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \to a$) **I, 7.1**

$\overset{\circ}{\mathrm{U}}_{-}(a)$ и $\overset{\circ}{\mathrm{U}}_{+}(a)$ — проколотые левая и правая полуокрестности точки a **I, 7.2**

$f(a+0)$ — предел справа функции $f(x)$ в точке a **I, 7.2**

$f(a-0)$ — предел слева функции $f(x)$ в точке a **I, 7.2**

Δx и $\Delta y = \Delta f(x)$ — приращения аргумента x и функции $y = f(x)$ **I, 9.1; 1.2**

$f(x) \underset{x\to a}{=} O\big(g(x)\big)$ — функция $f(x)$ одного порядка по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$ **I, 10.1**

$f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$ — функция $f(x)$ более высокого порядка малости относительно функции $g(x)$ при $x \to a$ **I, 10.1**

$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ — функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными при $x \to a$ **I, 10.2**

$f'(a) = f'(x)\big|_{x=a}$ — производная функции $f(x)$ в точке a **1.3**

$y'(x)$, y'_x, dy/dx, y' — производная функции $y = f(x)$ **1.3**

$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ — односторонние производные функции $f(x)$ в точке a справа $(x \to a+0)$ и слева $(x \to a-0)$ **1.6**

dx и $dy = df(x)|_{x=a}$ — дифференциалы аргумента x и функции $y = f(x)$ в точке a **3.1**

$f''(a) = f''(x)\big|_{x=a}$ и $f'''(a) = f'''(x)\big|_{x=a}$ — производные второго и третьего порядков функции $f(x)$ в точке a **4.1**

$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(x)\big|_{x=a}$ — производная n-го порядка (n-я производная) функции $f(x)$ в точке a **4.1**

$C^n(E)$ — множество всех функций, n раз непрерывно дифференцируемых в промежутке E **4.1**

$d^n x$ и $d^n y = d^n f(x)$ — дифференциалы n-го порядка аргумента x и функции $y = f(x)$ **4.5**

$\boldsymbol{r}(t)$ — вектор-функция скалярного аргумента t **9.1**

$|\boldsymbol{a}|$ — длина (модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ **9.1**

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты (единичные векторы) ортонормированного базиса $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ **9.1**

$\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{r}'(t)\big|_{t=t_0}$ — производная вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в точке t_0 **9.1**

ρ и φ — полярные координаты (радиус и угол) точки на плоскости **I, 4.3; 9.3**

$\operatorname{sgn} x$ — функция знака числа x **I, 3.2**

i — мнимая единица $(i^2 = -1)$ **I, 4.3; 11.3**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K $\varkappa$	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	T τ	тау
Δ δ	дельта	M μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	N ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	X χ	хи
H η	эта	O o	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ ϑ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1.1. Вводные замечания

В выпуске [I] основной способ исследования функции $f(x)$ состоял в изучении ее поведения в окрестности некоторой точки $x = a$. Он сводился, как правило, к установлению существования предела функции в данной точке и вычислению его значения. В том случае, если функция определена в точке $x = a$ и имеет в ней предел, то совпадение ее значения $f(a)$ со значением предела, т.е. равенство

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x), \tag{1.1}$$

означает, что функция непрерывна в этой точке [I, 9.1].

Теория пределов позволяет по информации о поведении функции в окрестности фиксированной точки сделать заключение о некоторых свойствах функции в этой точке. И наоборот, если существует предел функции в точке $x = a$, то возможен качественный анализ ее поведения в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ этой точки. В частности, известно [I, 7.4], что если существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

то у точки a найдется такая проколотая δ-окрестность $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a;\, \delta)$ $(\delta > 0)$, в которой функция $f(x)$ ограничена и ее значения сохраняют знак предела b (при $b \neq 0$). Этот анализ опирается на теорему 7.3 [I] о связи функции, ее предела и бесконечно малой (б.м.) функции в виде зависимости

$$f(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \alpha(x), \tag{1.2}$$

2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Рассмотренные выше понятия и свойства *производной* позволяют установить правила *дифференцирования* суммы, разности и произведения функций, частного от деления одной функции на другую, а также получить выражения для производных сложной и обратной функций. Все эти правила составляют основу для практического применения дифференциального исчисления.

2.1. Дифференцирование и арифметические операции

Теорема 2.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ *дифференцируемы в точке* x. Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма (разность), произведение и частное (последнее при условии $v(x) \neq 0$), причем (опуская в обозначениях аргумент x) справедливы равенства:

1) $(u+v)' = u' + v'$;

2) $(uv)' = u'v + uv'$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

◀ При доказательстве используем определение 1.2 производной и правила предельного перехода для суммы, произведения и частного двух функций [I, 7.4].

1. Пусть $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции u, v и y получат соответственно приращения $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$ и $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = ((u+\Delta u) \pm (v+\Delta v)) - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

3.1. Определение дифференциала и его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и *дифференцируема* в этой точке. Тогда, согласно определению 1.3 дифференцируемости функции, ее приращение, вызванное приращением $\Delta x = x - a$ в этой окрестности аргумента x, можно представить в виде

$$\Delta y = f(x) - f(a) = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x, \tag{3.1}$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а $\beta(\Delta x)$ — функция, бесконечно малая (б.м.) при $\Delta x \to 0$.

Если $A \neq 0$, то при $\Delta x \to 0$ величина $A\Delta x$ является б.м. первого порядка относительно Δx, а $\beta(\Delta x)\Delta x$ — б.м. более высокого порядка по сравнению с Δx [I, 10.1]. Тогда $A\Delta x$ в (3.1) будет главной частью [I, 10.3] Δy, причем линейной относительно Δx, т.е. пропорциональной приращению аргумента.

Определение 3.1. ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** a, соответствующим приращению Δx аргумента x, называют главную (линейную относительно Δx) часть приращения Δy этой функции.

Обозначают дифференциал dy или $df(a)$, т.е. с учетом (3.1) $dy = df(a) = A\Delta x$. В силу теоремы 1.1 о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции $A = f'(a)$. Поэтому дифференциал в точке a

$$dy = f(a)\Delta x. \tag{3.2}$$

Если $f'(a) = 0$, то $f'(a)\Delta x$ не является главной частью приращения Δy, поскольку $\beta(\Delta x)\Delta x$ в (3.1), вообще говоря,

4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ *дифференцируема* на некотором промежутке E, т.е. $\exists f'(x)$ $\forall x \in E$. Тогда *производная* $f'(x)$ является тоже функцией аргумента x с областью определения E. Если эта новая функция $f'(x)$ дифференцируема, то можно найти ее производную, называемую ***второй производной*** исходной ***функции*** $f(x)$, или ***производной второго порядка***, и обозначаемую $f''(x)$. В связи с этим $f'(x)$ для определенности называют ***первой производной***, или ***производной первого порядка***.

Геометрически значение второй производной соответствует *угловому коэффициенту касательной* к графику зависимости первой производной от аргумента x. С точки зрения механики вторая производная функции $s = f(t)$, описывающей закон прямолинейного движения точки во времени t, — это скорость изменения скорости $v = f'(t)$ точки, т.е. ускорение $w = v' = \big(f'(t)\big)' = f''(t) = s''$, или (как принято в механике), обозначая *дифференцирование* по времени точкой над символом функции, $w = \dot{v} = \ddot{s}$.

Ясно, что если $f''(x)$ в свою очередь является дифференцируемой функцией аргумента x, то последующее дифференцирование $f''(x)$ даст третью производную $f'''(x) = \big(f''(x)\big)'$, или производную третьего порядка, и так далее.

Определение 4.1. ***Производной n-го порядка*** функции $f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го

5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Эти теоремы играют важную роль в математическом анализе при исследовании функций. Их иногда называют теоремами о среднем значении (в смысле значения *производной* в некоторой внутренней точке рассматриваемого отрезка) и связывают с именами французских математиков П. Ферма́ (1601–1665), М. Ро́лля (1652–1719), Ж. Лагра́нжа (1736–1813) и О. Коши́ (1789–1857).

5.1. Теоремы о нулях производных

Теорема 5.1 (Ферма). Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором промежутке E и во внутренней точке c этого промежутка принимает *наибольшее* или *наименьшее значение*. Если в этой точке существует *конечная производная* $f'(c)$ данной функции, то $f'(c)=0$.

◀ Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c наибольшее значение. Тогда $\forall x \in E$ $f(x) \leqslant f(c)$. Положив $x = c+\Delta x$, получим $f(c+\Delta x) \leqslant f(c)$. Согласно определению 1.2 производной и условию теоремы, существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c).$$

Если $\Delta x > 0$, то $\big(f(c+\Delta x)-f(c)\big)/\Delta x \leqslant 0$ и из правил предельного перехода в неравенствах [I, 7.4] следует, что

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'_+(c) \leqslant 0.$$

6. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Понятие *производной* и доказанные в гл. 5 теоремы можно использовать для раскрытия *неопределенностей*, среди которых выделим прежде всего неопределенности вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$. Правило раскрытия этих неопределенностей связывают с именами швейцарского математика И. Бернулли (1667–1748), сформулировавшего это правило, и французского математика Г. Лопиталя (1661–1704), который опубликовал его в первом печатном руководстве по дифференциальному исчислению.

6.1. Раскрытие неопределенности вида $[0/0]$

Исследуем вначале вопрос о пределе отношения двух бесконечно малых (б.м.) при $x \to a$ функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 6.1. Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и *дифференцируемы* в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{\mathrm{U}}(a)$ точки a;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанной окрестности;

4) существует (конечный или *бесконечный*) предел отношения *производных*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{6.1}$$

7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора является одной из жемчужин математического анализа и широко используется как в теоретических исследованиях, так и в вычислительной практике. Она позволяет функцию, заданную сложным аналитическим выражением, заменить удобным для анализа *многочленом*.

7.1. Линейное и квадратичное приближения функции

Приближенная формула (3.7) в виде

$$f(x) \approx f(a) + df(a) = f(a) + f'(a)\,dx = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (7.1)$$

позволяет для *дифференцируемой в точке* $x = a$ *функции* $f(x)$ найти ее приближенное значение в окрестности этой точки, не прибегая к непосредственному вычислению $f(x)$. По существу, (7.1) дает возможность прогнозировать поведение функции $f(x)$ в окрестности точки a, располагая лишь значениями $f(a)$ и $f'(a)$. Однако такой прогноз точен только для *линейной функции* в виде *многочлена* первой степени $f(x) = P_1(x) = c_0 + c_1(x-a)$, так как $f(a) = P_1(a) = c_0$ и $f'(a) = P_1'(a) = c_1$. Поскольку правая часть (7.1) является линейной функцией относительно аргумента x, (7.1) называют ***линейным приближением функции*** $f(x)$ в окрестности точки a.

Погрешность приближенной формулы (7.1)

$$R_1(x) = \Delta f(a) - df(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(x-a) \quad (7.2)$$

вызвана заменой приращения $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$ функции ее *дифференциалом* $df(a) = f'(a)(x-a)$ и для дифференцируемой функции является при $x \to a$ бесконечно малой (б.м.) более

8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

8.1. Условия возрастания и убывания функций

При изучении поведения функции необходимо знать промежутки числовой оси, на которых она сохраняет постоянное значение или изменяется монотонно. Такие промежутки можно выявить, проверяя соответствующие условия. Ранее (см. следствие 5.2) было показано, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на (a, b) *производная* $f'(x) = 0$, тождественно равную нулю, то эта функция постоянна на $[a, b]$. Аналогичное утверждение верно и для функции $f(x)$, *дифференцируемой в интервале.* Из этого утверждения вытекает важное в дальнейшем следствие.

Следствие 8.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале (a, b), причем $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$, то эти функции в указанном интервале могут различаться лишь на постоянную, т.е.

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in (a, b) \quad (c = \text{const}).$$

Чтобы доказать это утверждение, достаточно рассмотреть разность функций $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Так как производная $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $\varphi(x) =$const, иначе говоря, $f(x) - g(x) = c$, или $f(x) = g(x) + c$.

Примеры. а. Пусть

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{и} \quad g(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

9.1. Векторная функция скалярного аргумента

Определение 9.1. Если каждому значению независимого переменного $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, называемого далее ***скалярным аргументом***, поставить в соответствие единственный *вектор* $\boldsymbol{r}(t)$, то $\boldsymbol{r}(t)$ называют ***вектор-функцией*** (***векторной функцией***) ***скалярного аргумента***. Вектор $\boldsymbol{r}(t)$ с началом в фиксированной точке O называют ***радиус-вектором***.

Пусть в геометрическом (трехмерном) пространстве задана *прямоугольная декартова система координат* Oxyz с *ортонормированным базисом* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Тогда представление

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{9.1}$$

является *разложением* радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ в этом базисе, причем $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — *действительные функции* одного *действительного переменного* t с общей областью определения $T \subseteq \mathbb{R}$, называемые ***координатными функциями*** вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$. Если $z(t) = 0$ $\forall t \in T$, то ***вектор-функцию*** называют ***двумерной*** в отличие от общего случая ***трехмерной вектор-функции***.

Итак, задание одной трехмерной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ скалярного аргумента равносильно заданию трех *действительных (скалярных) функций* $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ этого же аргумента.

Определение 9.2. ***Пределом вектор-функции*** $\boldsymbol{r}(t)$ при $t \to t_0$ называют вектор $\boldsymbol{a}$ и обозначают $\lim\limits_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$ или

10. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

10.1. Табличный способ задания функции

Функция $y = f(x)$ как зависимость y от x может быть задана различными способами [I, 3.2]. До сих пор мы использовали аналитический способ задания в виде формулы, а для наглядности применяли графический способ и изучали приемы построения графика функции по ее формуле. Напомним, что зависимость y от x может быть описана и словесно или задана в виде некоторой определенной последовательности действий, т.е. алгоритмически, а также в виде таблицы n пар дискретных значений x_i и соответствующих им значений y_i $(i = \overline{1, n})$:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
y	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\ldots$	$y_i = f(x_i)$	$\ldots$	$y_n = f(x_n)$

Такая таблица может быть результатом вычисления значений функции по значениям аргумента (***табулирования функции***) или итогом многократного измерения двух связанных между собой величин при проведении научно-исследовательского эксперимента или испытания технического объекта (простейший пример — измерение времени и пройденного за это время пути). Тогда возникает обратная задача: по отдельным парам значений x_i и $y_i = f(x_i)$ составить более полное представление о функции $y = f(x)$. Один из путей решения этой задачи — построить график функции $f(x)$ по n точкам

11. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.1. Постановка задачи

Необходимость решения ***нелинейного уравнения*** вида

$$f(x) = 0 \tag{11.1}$$

с одним неизвестным x часто возникает в научных исследованиях и технических приложениях. В частности, „подозрительные“ на *экстремум стационарные точки функции* $g(x)$ следует искать из условия $g'(x) = f(x) = 0$. В общем случае задача состоит в поиске таких значений x^*, подстановка которых в (11.1) приводила бы к тождеству $f(x^*) \equiv 0$. Эти значения называют ***корнями*** (или решениями) ***уравнения*** (11.1).

По общей классификации задач вычислительной математики поиск корней (11.1) можо отнести к ***обратной задаче***. В самом деле, пусть функция $y = f(x)$ осуществляет *отображение*

$$f:\ X \to Y$$

множества $X \subseteq \mathbb{R}$ на множество $Y \subseteq \mathbb{R}$. Тогда задача состоит в построении (если это возможно) обратной к $f(x)$ функции $x = f^{-1}(y)$, которая осуществляет *обратное отображение* $f^{-1}:\ Y \to X$, и нахождении *образа* $x^* = f^{-1}(0) \in X$, соответствующего его *прообразу* $y = 0$ (при условии, что Y содержит элемент $y = 0$).

Известно, что *действительная функция* $f(x)$ одного *действительного переменного* x в некотором промежутке своей области определения имеет обратную функцию, если она в этом промежутке строго монотонна [I, 9.4]. Если в этом случае обратная функция определена в точке $y = 0$ и может быть

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984. 432 с.

Виноградов И.М. Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1988. 176 с.

Зорич В.А. Математический анализ: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1981. 544 с. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1982. 616 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Начальный курс / Под ред. *А.Н. Тихонова.* М.: Изд-во МГУ, 1985. 662 с.

Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Карташев А.П., Рождественнский Б.Л. Математический анализ. М.: Наука, 1984. 448 с.

Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с. Т. 3. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Пер. с нем. и англ: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1967. 704 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985. 432 с.

Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.

Уваров В.Б. Математический анализ. М.: Высш. шк., 1984. 288 с.

Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.

Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики: В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1973. 480 с.

Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 624 с.

Шилов Г.Е. Математический анализ: Функции одного переменного: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1969. 528 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. *Ю.С. Богданова.* Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ: Справочное пособие для студентов втузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Вышэйш. шк., 1989. 288 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища школа, 1985. 528 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. *Ю.В. Прохоров.* М.: Сов. энциклопедия, 1988. 848 с.

Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра: Справочная математическая библиотека. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.

Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики / *Л.И. Бородич, А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, И.Н. Мелешко.* Минск: Вышэйш. шк., 1986. 190 с.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1972. 400 с.

Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и техике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 256 с.

Задачники

Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под общ. ред. *В.А. Садовничего.* М.: Изд-во МГУ, 1988. 416 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1986. 304 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. Киев: Вища шк., 1987. 408 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. *Б.П. Демидовича.* М.: Наука, 1970. 472 с.

Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1967. 946 с.

Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. М.: Наука, 1970. 400 с.

Математический анализ в вопросах и задачах / Под ред. *В.Ф. Бутузова.* М.: Высш. шк., 1984. 200 с.

Михайленко В.М., Антонюк Р.А. Сборник прикладных задач по высшей математике. Киев: Выща шк., 1990. 168 с.

Оселедец В.И., Каролинская Л.Н. Сборник задач по высшей математике с техническим содержанием. М.: Изд-во Мин-ва обороны СССР, 1989. 148 с.

Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1987. 311 с.

Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978. 208 с.

Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*: В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1981. 484 с.

Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Под ред. *Л.Д. Кудрявцева.* М.: Наука, 1984. 592 с.

Сборник задач по методам вычислений / Под ред. *П.И. Монастырного.* М.: Физматлит, 1994. 320 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск II

Иванова Елена Евгеньевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редактор *Г.А. Нилова*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.06.2004 г.

Подписано в печать 20.06.2006. Формат 60×88 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 24,92.
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-2885-6
9 785703 828854