

МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$$\Delta y = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x$$

II

Е.Е. Иванова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОГО
ПЕРЕМЕННОГО

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Математика в техническом
университете

Выпуск II

*Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год*

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций
одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций
многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций
одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы.
Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования
и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения
математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций
- XXI. Математическое моделирование в технике

Е.Е. Иванова

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ
ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ
ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, исправленное

*Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2006

УДК 517.2.221(075.8)

ББК 22.161.1

И20

Рецензенты: доц. Л.Н. Каролинская, доц. Н.В. Копченова

Иванова Е.Е.

И20 Дифференциальное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов. – 3-е изд., исправл. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. II).

ISBN 5-7038-2885-6 (Вып. II)

ISBN 5-7038-2484-2

Книга является вторым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете“. Знакомит читателя с понятиями производной и дифференциала, с их использованием при исследовании функций одного переменного. Большое внимание уделено геометрическим приложениям дифференциального исчисления и его применению к решению нелинейных уравнений, интерполированию и численному дифференцированию функций. Приведены примеры и задачи физического, механического и технического содержания.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который автор читает в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических вузов. Может быть полезна преподавателям и аспирантам.

Ил. 95. Табл. 3. Библиогр. 48 назв.

УДК 517.2.221(075.8)
ББК 22.161.1

ISBN 5-7038-2885-6 (Вып. II)

ISBN 5-7038-2484-2

- © Е.Е. Иванова, 1998;
2006, с изменениями
- © Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 1998;
2006, с изменениями
- © Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 1998;
2006, с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальное исчисление является одним из основных разделов математического анализа и служит инструментом исследования функций. В этой книге (втором выпуске комплекса учебников „Математика в техническом университете“) предметом исследования будут лишь *функции* одного *действительного переменного*, что и определяет ее название.

Решающие шаги в создании дифференциального исчисления функций одного переменного сделали в XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц. В современном представлении теоретическую основу дифференциального исчисления (и вообще математического анализа) составляет теория пределов. Используемые в этой книге сведения из теории пределов можно найти в изданном в 1996 г. и названном „Введение в анализ“ первом выпуске упомянутого комплекса учебников.

В тексте книги имеются ссылки на другие выпуски комплекса учебников. Такой ссылкой служит номер выпуска. Например, [I, 7.5] означает, что имеется в виду пятый параграф седьмой главы в первом выпуске. Ссылки без римских цифр относятся только к этому, второму, выпуску. Так, (см. 1.2) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы, а (см. Д.4.1) — к первому дополнению четвертой главы этой книги. Ссылки на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (2.1) — первая формула в главе 2, (рис. 1.5) — пятый рисунок в главе 1).

Большинство используемых в этой книге обозначений введено в [I]. Они помещены в следующем за предисловием перечне основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны глава и параграф, в которых можно найти более подробное объяснение по каждому из обозначений. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, включающий в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) термины, значения которых необходимо знать читателю для понимания излагаемого материала. За каждым термином следует страница, на которой он строго определен или описан и выделен в тексте *полужирным курсивом*. Если термин введен в другом выпуске, то дана ссылка на этот выпуск (например, III означает ссылку на третий выпуск, а I-312 — на страницу 312 первого выпуска), а также указана курсивом страница предлагаемой книги, на которой имеются некоторые пояснения к этому термину.

Ключевые слова, важные для понимания содержания, при первом упоминании в каждом параграфе выделены *светлым курсивом*. Значение этих слов читатель может уточнить при помощи предметного указателя.

Перед чтением этой книги нужно в целях самоконтроля выполнить следующие несложные задания. При возникновении затруднений все необходимые сведения можно найти в [I]. Значения терминов, выделенных в тексте этих заданий **прямым полужирным** шрифтом, далее будем считать известными (в основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в предметный указатель).

Задания для самопроверки

1. Какие **числа** принадлежат множествам \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Что такое **абсолютное значение (модуль)** числа?
2. Каков ход доказательства по **методу математической индукции**?
3. Запишите обозначения **промежутков числовой прямой: интервала, отрезка, полуинтервала, бесконечных интервала и полуинтервала**.
4. Изобразите на числовой прямой **окрестности конечной и бесконечной точек расширенной числовой прямой**.

мой. В чем отличие этих окрестностей от **проколотых окрестностей** и **полуокрестностей**.

5. Укажите **области определения** (существования) и **значений** и постройте **графики однозначных ветвей многозначной функции** $y^2 = 1/x$.

6. Охарактеризуйте **явный** и **неявный аналитические, параметрический, графический, табличный, алгоритмический** и **словесный** способы задания функции. Приведите примеры **составной, четной, нечетной** и **периодической функций**.

7. Какими свойствами обладают **сходящиеся последовательности**? Сформулируйте **признак Вейерштрасса сходимости последовательности**.

8. Сформулируйте и запишите в символическом виде определения (по Гейне и по Коши) **конечного предела функции в точке** $a \in \mathbb{R}$.

9. Выполните задание 8, когда **аргумент функции** стремится к бесконечной точке расширенной числовой прямой.

10. Приведите пример **функции, ограниченной** в некоторой проколотой окрестности точки a , но не имеющей предела в этой точке.

11. Сформулируйте теорему о связи предела функции в точке с **односторонними пределами** функции в этой точке.

12. Определена ли функция $2x^2/\sin x$ в точке $x = 0$? Существует ли в этой точке предел рассматриваемой функции?

13. При каком изменении аргумента функции $\sin x$, $1/x$ являются **бесконечно малыми**, а функции x^2 , $\operatorname{ctg} x$ — **бесконечно большими**?

14. Какова связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями? При каких условиях произведение двух функций является бесконечно малой функцией?

15. Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции.

16. Запишите выражения для **первого и второго замечательных пределов**.

17. Какова связь между **приращением функции** и **приращением ее аргумента** для **функции, непрерывной в точке и непрерывной в этой точке** только слева?

18. При выполнении каких условий **сложная функция (суперпозиция функций)** непрерывна в точке?

19. Приведите примеры функций, имеющих **точки**: а) **разрыва первого рода**; б) **устранимого разрыва**; в) **разрыва второго рода**.

20. Приведите примеры **функций, непрерывных в интервале (a, b)** , но не являющихся **непрерывными на отрезке $[a, b]$** . Сформулируйте свойства функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Сохраняет ли эти свойства функция, непрерывная лишь в интервале (a, b) ?

21. Перечислите **основные элементарные функции**. Какие из этих функций определены и непрерывны на всем **множестве действительных чисел**? Какие функции относятся к классу **элементарных функций**? Входят ли в этот класс **гиперболические тангенс и котангенс**?

22. В чем различие между **монотонной** и **строго монотонной** в некотором промежутке функциями? Каковы условия существования в нем **непрерывной** и **строго монотонной функции, обратной** заданной функции? Изобразите графики **возрастающей, убывающей, невозрастающей и неубывающей** в промежутке **функций**.

23. Приведите примеры бесконечно малых при $x \rightarrow a$ функций: а) **одного порядка**; б) **более высокого порядка малости**; в) **первого порядка малости**; г) **несравнимых**; д) **эквивалентных**. Сформулируйте свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

24. Каков смысл символов „ o малое“ и „ O большое“?

25. Запишите в виде **степенной функции** **главную часть** функции, бесконечно малой при $x \rightarrow a$.

26. Приведите примеры функций, графики которых имеют **вертикальную, односторонние и двусторонние горизонтальные и наклонные асимптоты**.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◀ и ▶ — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания
- $a \in A, A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) **I, 1.1**
- $A = \{a, b, c\}$ — множество A состоит из элементов a, b, c **I, 1.1**
- $A \subset B, B \supset A$ — подмножество A включено в множество B (B включает A) **I, 1.2**
- $A \subseteq B, B \supseteq A$ — подмножество A включено в множество B или совпадает с ним **I, 1.2**
- \mathbb{N} — множество натуральных чисел **I, 1.3**
- \mathbb{Z} — множество целых чисел **I, 1.3**
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел **I, 1.3**
- \mathbb{R} — множество действительных чисел **I, 1.3**
- $[a, b]$ — отрезок с концами в точках a и b **I, 1.3**
- (a, b) — интервал с концами в точках a и b **I, 1.3**
- $[a, b), (a, b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b **I, 1.3**
- $|x|$ — абсолютное значение числа x **I, 1.3**
- $+\infty, -\infty$ — бесконечные точки расширенной (пополненной) числовой прямой **I, 1.3**
- ∞ — объединение бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$ **I, 1.3**
- $(-\infty, +\infty), (-\infty, a), (b, +\infty)$ — бесконечные интервалы **I, 1.3**
- $(-\infty, a], [b, +\infty)$ — бесконечные полуинтервалы **I, 1.3**
- $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 **I, 1.3, I, 5.2**
- $U(x_0, \varepsilon)$ — ε -окрестность точки x_0 **I, 1.3, I, 5.2**
- $A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует B (A — достаточное условие B , а B — необходимое условие A) **I, 1.5**

$A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны **I, 1.5**

$:\Leftrightarrow$ — утверждение справедливо по определению **I, 1.5**

$\exists x : \dots$ — существует такое x , что ... **I, 1.5**

$\exists! x : \dots$ — существует единственное x , такое, что ... **I, 1.5**

$\nexists x : \dots$ — не существует x , такого, что ... **I, 1.5**

$\forall x$ — для любого x **I, 1.5**

$f: X \rightarrow Y$ — отображение f множества X в (или на) множество Y **I, 2.1; 10.1**

$y = f(x)$ — переменное y — функция переменного x **I, 2.1**

$f(a) = f(x)|_{x=a}$ — значение функции $f(x)$ в точке a **I, 2.1**

$x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$ **I, 2.3; 11.1**

$M(x, y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината) **I, 2.5**

$\sum_{k=1}^n a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ **I, 2.6**

$\prod_{m=1}^n a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \dots, a_m, \dots, a_n$ **I, 2.6**

$k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества \mathbb{N} от 1 до n включительно **I, 2.6**

$\overset{\circ}{U}(a)$ — проколота окрестность точки a **I, 7**

$\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ — проколота δ -окрестность точки a **I, 7**

$x \rightarrow a$ — переменное x стремится к точке a **I, 7.1**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \rightarrow a$) **I, 7.1**

$\overset{\circ}{U}_-(a)$ и $\overset{\circ}{U}_+(a)$ — проколотые левая и правая полуокрестности точки a **I, 7.2**

$f(a+0)$ — предел справа функции $f(x)$ в точке a **I, 7.2**

$f(a-0)$ — предел слева функции $f(x)$ в точке a **I, 7.2**

Δx и $\Delta y = \Delta f(x)$ — приращения аргумента x и функции $y = f(x)$ **I, 9.1; 1.2**

$f(x) = O(g(x))$ — функция $f(x)$ одного порядка по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \rightarrow a$ **I, 10.1**

$f(x) = o(g(x))$ — функция $f(x)$ более высокого порядка малости относительно функции $g(x)$ при $x \rightarrow a$ **I, 10.1**

$f(x) \sim g(x)$ — функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными при $x \rightarrow a$ **I, 10.2**

$f'(a) = f'(x)|_{x=a}$ — производная функции $f(x)$ в точке a **1.3**

$y'(x)$, y'_x , dy/dx , y' — производная функции $y = f(x)$ **1.3**

$f'_+(a)$ и $f'_-(a)$ — односторонние производные функции $f(x)$ в точке a справа ($x \rightarrow a + 0$) и слева ($x \rightarrow a - 0$) **1.6**

dx и $dy = df(x)|_{x=a}$ — дифференциалы аргумента x и функции $y = f(x)$ в точке a **3.1**

$f''(a) = f''(x)|_{x=a}$ и $f'''(a) = f'''(x)|_{x=a}$ — производные второго и третьего порядков функции $f(x)$ в точке a **4.1**

$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(x)|_{x=a}$ — производная n -го порядка (n -я производная) функции $f(x)$ в точке a **4.1**

$C^n(E)$ — множество всех функций, n раз непрерывно дифференцируемых в промежутке E **4.1**

$d^n x$ и $d^n y = d^n f(x)$ — дифференциалы n -го порядка аргумента x и функции $y = f(x)$ **4.5**

$r(t)$ — вектор-функция скалярного аргумента t **9.1**

$|a|$ — длина (модуль) вектора a **9.1**

i, j, k — орты (единичные векторы) ортонормированного базиса $\{i, j, k\}$ **9.1**

$r'(t_0) = r'(t)|_{t=t_0}$ — производная вектор-функции $r(t)$ в точке t_0 **9.1**

ρ и φ — полярные координаты (радиус и угол) точки на плоскости **I, 4.3; 9.3**

$\operatorname{sgn} x$ — функция знака числа x **I, 3.2**

i — мнимая единица ($i^2 = -1$) **I, 4.3; 11.3**

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a <i>A a</i>	а	N n <i>N n</i>	эн
B b <i>B b</i>	бэ	O o <i>O o</i>	о
C c <i>C c</i>	цэ	P p <i>P p</i>	пэ
D d <i>D d</i>	дэ	Q q <i>Q q</i>	ку
E e <i>E e</i>	е	R r <i>R r</i>	эр
F f <i>F f</i>	эф	S s <i>S s</i>	эс
G g <i>G g</i>	же	T t <i>T t</i>	тэ
H h <i>H h</i>	аш	U u <i>U u</i>	у
I i <i>I i</i>	и	V v <i>V v</i>	вэ
J j <i>J j</i>	йот	W w <i>W w</i>	дубль-вэ
K k <i>K k</i>	ка	X x <i>X x</i>	икс
L l <i>L l</i>	эль	Y y <i>Y y</i>	игрек
M m <i>M m</i>	эм	Z z <i>Z z</i>	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
E ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Z ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1.1. Вводные замечания

В выпуске [I] основной способ исследования функции $f(x)$ состоял в изучении ее поведения в окрестности некоторой точки $x = a$. Он сводился, как правило, к установлению существования предела функции в данной точке и вычислению его значения. В том случае, если функция определена в точке $x = a$ и имеет в ней предел, то совпадение ее значения $f(a)$ со значением предела, т.е. равенство

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad (1.1)$$

означает, что функция непрерывна в этой точке [I, 9.1].

Теория пределов позволяет по информации о поведении функции в окрестности фиксированной точки сделать заключение о некоторых свойствах функции в этой точке. И наоборот, если существует предел функции в точке $x = a$, то возможен качественный анализ ее поведения в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки. В частности, известно [I, 7.4], что если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

то у точки a найдется такая проколотая δ -окрестность $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$ ($\delta > 0$), в которой функция $f(x)$ ограничена и ее значения сохраняют знак предела b (при $b \neq 0$). Этот анализ опирается на теорему 7.3 [I] о связи функции, ее предела и бесконечно малой (б.м.) функции в виде зависимости

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \alpha(x), \quad (1.2)$$

2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Рассмотренные выше понятия и свойства *производной* позволяют установить правила *дифференцирования* суммы, разности и произведения функций, частного от деления одной функции на другую, а также получить выражения для производных сложной и обратной функций. Все эти правила составляют основу для практического применения дифференциального исчисления.

2.1. Дифференцирование и арифметические операции

Теорема 2.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x . Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма (разность), произведение и частное (последнее при условии $v(x) \neq 0$), причем (опуская в обозначениях аргумент x) справедливы равенства:

- 1) $(u + v)' = u' + v'$;
- 2) $(uv)' = u'v + uv'$;
- 3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

◀ При доказательстве используем определение 1.2 производной и правила предельного перехода для суммы, произведения и частного двух функций [I, 7.4].

1. Пусть $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Дадим аргументу x приращение Δx . Тогда функции u , v и y получат соответственно приращения $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = ((u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)) - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ

3.1. Определение дифференциала и его геометрический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в этой точке. Тогда, согласно определению 1.3 дифференцируемости функции, ее приращение, вызванное приращением $\Delta x = x - a$ в этой окрестности аргумента x , можно представить в виде

$$\Delta y = f(x) - f(a) = A\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x, \quad (3.1)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx , а $\beta(\Delta x)$ — функция, бесконечно малая (б.м.) при $\Delta x \rightarrow 0$.

Если $A \neq 0$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ величина $A\Delta x$ является б.м. первого порядка относительно Δx , а $\beta(\Delta x)\Delta x$ — б.м. более высокого порядка по сравнению с Δx [I, 10.1]. Тогда $A\Delta x$ в (3.1) будет главной частью [I, 10.3] Δy , причем линейной относительно Δx , т.е. пропорциональной приращению аргумента.

Определение 3.1. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке a , соответствующим приращению Δx аргумента x , называют главную (линейную относительно Δx) часть приращения Δy этой функции.*

Обозначают дифференциал dy или $df(a)$, т.е. с учетом (3.1) $dy = df(a) = A\Delta x$. В силу теоремы 1.1 о необходимом и достаточном условии дифференцируемости функции $A = f'(a)$. Поэтому дифференциал в точке a

$$dy = f'(a)\Delta x. \quad (3.2)$$

Если $f'(a) = 0$, то $f'(a)\Delta x$ не является главной частью приращения Δy , поскольку $\beta(\Delta x)\Delta x$ в (3.1), вообще говоря,

4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

4.1. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке E , т.е. $\exists f'(x) \forall x \in E$. Тогда производная $f'(x)$ является тоже функцией аргумента x с областью определения E . Если эта новая функция $f'(x)$ дифференцируема, то можно найти ее производную, называемую **второй производной** исходной **функции** $f(x)$, или **производной второго порядка**, и обозначаемую $f''(x)$. В связи с этим $f'(x)$ для определенности называют **первой производной**, или **производной первого порядка**.

Геометрически значение второй производной соответствует **угловому коэффициенту касательной** к графику зависимости первой производной от аргумента x . С точки зрения механики вторая производная функции $s = f(t)$, описывающей закон прямолинейного движения точки во времени t , — это скорость изменения скорости $v = f'(t)$ точки, т.е. ускорение $w = v' = (f'(t))' = f''(t) = s''$, или (как принято в механике), обозначая дифференцирование по времени точкой над символом функции, $w = \dot{v} = \ddot{s}$.

Ясно, что если $f''(x)$ в свою очередь является дифференцируемой функцией аргумента x , то последующее дифференцирование $f''(x)$ даст третью производную $f'''(x) = (f''(x))'$, или производную третьего порядка, и так далее.

Определение 4.1. *Производной n -го порядка* функции $f(x)$ называют производную от производной $(n - 1)$ -го

5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Эти теоремы играют важную роль в математическом анализе при исследовании функций. Их иногда называют теоремами о среднем значении (в смысле значения *производной* в некоторой внутренней точке рассматриваемого отрезка) и связывают с именами французских математиков П. Ферма́ (1601–1665), М. Рóлля (1652–1719), Ж. Лагранжа (1736–1813) и О. Коши́ (1789–1857).

5.1. Теоремы о нулях производных

Теорема 5.1 (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке E и во внутренней точке c этого промежутка принимает *наибольшее* или *наименьшее* значение. Если в этой точке существует *конечная производная* $f'(c)$ данной функции, то $f'(c) = 0$.

◀ Пусть для определенности $f(x)$ принимает в точке c наибольшее значение. Тогда $\forall x \in E \ f(x) \leq f(c)$. Положив $x = c + \Delta x$, получим $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Согласно определению 1.2 производной и условию теоремы, существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c).$$

Если $\Delta x > 0$, то $(f(c + \Delta x) - f(c))/\Delta x \leq 0$ и из правил предельного перехода в неравенствах [I, 7.4] следует, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'_+(c) \leq 0.$$

6. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Понятие *производной* и доказанные в гл. 5 теоремы можно использовать для раскрытия *неопределенностей*, среди которых выделим прежде всего неопределенности вида $[0/0]$ и $[\infty/\infty]$. Правило раскрытия этих неопределенностей связывают с именами швейцарского математика И. Бернулли (1667–1748), сформулировавшего это правило, и французского математика Г. Лопиталья (1661–1704), который опубликовал его в первом печатном руководстве по дифференциальному исчислению.

6.1. Раскрытие неопределенности вида $[0/0]$

Исследуем вначале вопрос о пределе отношения двух бесконечно малых (б.м.) при $x \rightarrow a$ функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 6.1. Пусть

- 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и *дифференцируемы* в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
- 3) $g'(x) \neq 0$ во всех точках указанной окрестности;
- 4) существует (конечный или *бесконечный*) предел отношения *производных*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \quad (6.1)$$

7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Формула Тейлора является одной из жемчужин математического анализа и широко используется как в теоретических исследованиях, так и в вычислительной практике. Она позволяет функцию, заданную сложным аналитическим выражением, заменить удобным для анализа *многочленом*.

7.1. Линейное и квадратичное приближения функции

Приближенная формула (3.7) в виде

$$f(x) \approx f(a) + df(a) = f(a) + f'(a)dx = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (7.1)$$

позволяет для дифференцируемой в точке $x = a$ функции $f(x)$ найти ее приближенное значение в окрестности этой точки, не прибегая к непосредственному вычислению $f(x)$. По существу, (7.1) дает возможность прогнозировать поведение функции $f(x)$ в окрестности точки a , располагая лишь значениями $f(a)$ и $f'(a)$. Однако такой прогноз точен только для *линейной функции* в виде *многочлена* первой степени $f(x) = P_1(x) = c_0 + c_1(x - a)$, так как $f(a) = P_1(a) = c_0$ и $f'(a) = P_1'(a) = c_1$. Поскольку правая часть (7.1) является линейной функцией относительно аргумента x , (7.1) называют **линейным приближением функции** $f(x)$ в окрестности точки a .

Погрешность приближенной формулы (7.1)

$$R_1(x) = \Delta f(a) - df(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = o(x - a) \quad (7.2)$$

вызвана заменой приращения $\Delta f(a) = f(x) - f(a)$ функции ее *дифференциалом* $df(a) = f'(a)(x - a)$ и для дифференцируемой функции является при $x \rightarrow a$ бесконечно малой (б.м.) более

8. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

8.1. Условия возрастания и убывания функций

При изучении поведения функции необходимо знать промежутки числовой оси, на которых она сохраняет постоянное значение или изменяется монотонно. Такие промежутки можно выявить, проверяя соответствующие условия. Ранее (см. следствие 5.2) было показано, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет на (a, b) производная $f'(x) = 0$, тождественно равную нулю, то эта функция постоянна на $[a, b]$. Аналогичное утверждение верно и для функции $f(x)$, дифференцируемой в интервале. Из этого утверждения вытекает важное в дальнейшем следствие.

Следствие 8.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале (a, b) , причем $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$, то эти функции в указанном интервале могут различаться лишь на постоянную, т.е.

$$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in (a, b) \quad (c = \text{const}).$$

Чтобы доказать это утверждение, достаточно рассмотреть разность функций $\varphi(x) = f(x) - g(x)$. Так как производная $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $\varphi(x) = \text{const}$, иначе говоря, $f(x) - g(x) = c$, или $f(x) = g(x) + c$.

Примеры. а. Пусть

$$f(x) = \text{arctg } x \quad \text{и} \quad g(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

9.1. Векторная функция скалярного аргумента

Определение 9.1. Если каждому значению независимого переменного $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, называемого далее *скалярным аргументом*, поставить в соответствие единственный *вектор* $\mathbf{r}(t)$, то $\mathbf{r}(t)$ называют *вектор-функцией (векторной функцией) скалярного аргумента*. Вектор $\mathbf{r}(t)$ с началом в фиксированной точке O называют *радиус-вектором*.

Пусть в геометрическом (трехмерном) пространстве задана *прямоугольная декартова система координат* $Oxyz$ с *ортонормированным базисом* $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда представление

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (9.1)$$

является *разложением* радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ в этом базисе, причем $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — *действительные функции* одного *действительного переменного* t с общей областью определения $T \subseteq \mathbb{R}$, называемые *координатными функциями* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Если $z(t) = 0 \quad \forall t \in T$, то *вектор-функцию* называют *двумерной* в отличие от общего случая *трехмерной вектор-функции*.

Итак, задание одной трехмерной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ скалярного аргумента равносильно заданию трех *действительных (скалярных) функций* $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ этого же аргумента.

Определение 9.2. *Пределом вектор-функции* $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$ называют вектор \mathbf{a} и обозначают $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ или

10. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

10.1. Табличный способ задания функции

Функция $y = f(x)$ как зависимость y от x может быть задана различными способами [I, 3.2]. До сих пор мы использовали аналитический способ задания в виде формулы, а для наглядности применяли графический способ и изучали приемы построения графика функции по ее формуле. Напомним, что зависимость y от x может быть описана и словесно или задана в виде некоторой определенной последовательности действий, т.е. алгоритмически, а также в виде таблицы n пар дискретных значений x_i и соответствующих им значений y_i ($i = \overline{1, n}$):

x	x_1	x_2	\dots	x_i	\dots	x_n
y	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	\dots	$y_i = f(x_i)$	\dots	$y_n = f(x_n)$

Такая таблица может быть результатом вычисления значений функции по значениям аргумента (*табулирования функции*) или итогом многократного измерения двух связанных между собой величин при проведении научно-исследовательского эксперимента или испытания технического объекта (простейший пример — измерение времени и пройденного за это время пути). Тогда возникает обратная задача: по отдельным парам значений x_i и $y_i = f(x_i)$ составить более полное представление о функции $y = f(x)$. Один из путей решения этой задачи — построить график функции $f(x)$ по n точкам

11. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

11.1. Постановка задачи

Необходимость решения *нелинейного уравнения* вида

$$f(x) = 0 \tag{11.1}$$

с одним неизвестным x часто возникает в научных исследованиях и технических приложениях. В частности, „подозрительные“ на экстремум стационарные точки функции $g(x)$ следует искать из условия $g'(x) = f(x) = 0$. В общем случае задача состоит в поиске таких значений x^* , подстановка которых в (11.1) приводила бы к тождеству $f(x^*) \equiv 0$. Эти значения называют **корнями** (или решениями) **уравнения** (11.1).

По общей классификации задач вычислительной математики поиск корней (11.1) можно отнести к **обратной задаче**. В самом деле, пусть функция $y = f(x)$ осуществляет *отображение*

$$f: X \rightarrow Y$$

множества $X \subseteq \mathbb{R}$ на множество $Y \subseteq \mathbb{R}$. Тогда задача состоит в построении (если это возможно) обратной к $f(x)$ функции $x = f^{-1}(y)$, которая осуществляет *обратное отображение* $f^{-1}: Y \rightarrow X$, и нахождении образа $x^* = f^{-1}(0) \in X$, соответствующего его *прообразу* $y = 0$ (при условии, что Y содержит элемент $y = 0$).

Известно, что *действительная функция* $f(x)$ одного действительного переменного x в некотором промежутке своей области определения имеет обратную функцию, если она в этом промежутке строго монотонна [I, 9.4]. Если в этом случае обратная функция определена в точке $y = 0$ и может быть

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

- Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.
- Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1984. 432 с.
- Виноградов И.М.* Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1988. 176 с.
- Зорич В.А.* Математический анализ: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1981. 544 с. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
- Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1982. 616 с.
- Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ: Начальный курс / Под ред. А.Н. Тихонова. М.: Изд-во МГУ, 1985. 662 с.
- Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Математический анализ. М.: Наука, 1984. 448 с.
- Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1976. 304 с.
- Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: В 3 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с. Т. 3. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.
- Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Пер. с нем. и англ.: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1967. 704 с.
- Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985. 432 с.
- Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- Турчак Л.И.* Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.
- Уваров В.Б.* Математический анализ. М.: Высш. шк., 1984. 288 с.
- Фитенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1966. 608 с.

Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики: В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1973. 480 с.

Хинчин А.Я. Краткий курс математического анализа. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 624 с.

Шилов Г.Е. Математический анализ: Функции одного переменного: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1969. 528 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. Ю.С. Богданова. Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ: Справочное пособие для студентов втузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Вышэйш. шк., 1989. 288 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища школа, 1985. 528 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 848 с.

Мишина А.П., Проскураков И.В. Высшая алгебра: Справочная математическая библиотека. М.: Физматгиз, 1962. 300 с.

Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. М.: Физматгиз, 1960. 293 с.

Справочное пособие по приближенным методам решения задач высшей математики / Л.И. Бородич, А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, И.Н. Мелешко. Минск: Вышэйш. шк., 1986. 190 с.

Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 280 с.

Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Наука, 1972. 400 с.

Шуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике: Пер. с англ. М.: Высш. шк., 1990. 256 с.

Задачники

Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под общ. ред. *В.А. Садовничево*. М.: Изд-во МГУ, 1988. 416 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1986. 304 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977. 528 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. Киев: Вища шк., 1987. 408 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. *Б.П. Демидовича*. М.: Наука, 1970. 472 с.

Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1967. 946 с.

Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. М.: Наука, 1970. 400 с.

Математический анализ в вопросах и задачах / Под ред. *В.Ф. Бутузова*. М.: Высш. шк., 1984. 200 с.

Мизгайленко В.М., Антонюк Р.А. Сборник прикладных задач по высшей математике. Киев: Выща шк., 1990. 168 с.

Оселедец В.И., Каролинская Л.Н. Сборник задач по высшей математике с техническим содержанием. М.: Изд-во Мин-ва обороны СССР, 1989. 148 с.

Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1987. 311 с.

Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978. 208 с.

Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*: В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1981. 484 с.

Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Под ред. *Л.Д. Кудрявцева*. М.: Наука, 1984. 592 с.

Сборник задач по методам вычислений / Под ред. *П.И. Монастырного*. М.: Физматлит, 1994. 320 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгоритм Евклида 352
Аргумент скалярный 244

Базис ортонормированный III, 244
– правый III, 282
– Френе сопровождающий 282
Бином Ньютона I-86, 83
Бинормаль 281
Брахистохрона 304

Вектор бинормальный 281
– главный нормальный 281
– Дарбу 283
– единичный III, 249
– нулевой III, 282
Вектор-функция двумерная 244
– дифференцируемая в точке 246
– непрерывно на множестве 248
– непрерывная в точке 246
– скалярного аргумента 244
– трехмерная 244

Векторы коллинеарные
– сонаправленные III, 249
– III, 99
– ортогональные III, 252
Вектор III, 99
Вронскиан VIII, 105

Гипотрохоида 299
Гипоциклоида 299
Годограф 250

Делитель многочленов общий 351
– – – наибольший 351

Дефект сплайна 342
Дискриминант квадратного
– трехчлена 354
Дифференциал вектор-функции в
– точке 246
– длины дуги плоской кривой 258
– функции в точке 63
– – – второй (второго порядка) 95
– – – первый (первого порядка) 95
– – – n -й (n -го порядка) 95
Дифференцирование 20
– логарифмическое 47
– численное 328
Длина кривой 253
Дополнение алгебраическое III, 41

Единица мнимая I-149, 357

Задача идентификации 310
– обратная 348
Значение функции максимальное
– 199
– – минимальное 199
– – наибольшее I-201, 106
– – наименьшее I-201, 106
– – экстремальное 199

Инвариантность формы записи
– дифференциала 67
Инволюта (эвольвента) 274
Интервал неопределенности корня
– 373
Интерполирование 310
– вперед (назад) 320

- Интерполяция 310
 – квадратичная (трехточечная) 313
 – линейная (двухточечная) 312

Кардиоида 298

Касательная 18

- к кривой 251
 – односторонняя 26

Катеноид 268

Квадратриса Динострата 288

Комбинация линейная I-226, 39

Константа I-215, 157

Контур замкнутый 251

– – простой 251

Конхоида 294

Координаты точки I-46, I-78, III,
311

Корень действительный 354

- кратный 349
 – локализованный 349
 – простой 349
 – уравнения I-345, 83, 348
 – – алгебраического 350

Корни комплексно сопряженные 354

Коэффициент угловой III, 18

Коэффициенты биномиальные I-86,
83

– многочлена I-132, 82

– Тейлора 160

Кратность корня нечетная (четная)
349

– – уравнения 349

– нуля многочлена I-159, 168

– узла интерполяции 324

Кривая алгебраическая 261

– Вивиани 306

– гладкая 251

– дифференцируемая непрерывно
251

Кривая замкнутая 251

– кусочно-гладкая 251

– (непрерывная) 249

– плоская 257

– распадающаяся (приводимая) 262

– спрямляемая 253

– таутохронная 304

Кривизна дуги средняя 263

– кривой в точке полная 283

– плоской кривой в точке 263

– пространственной кривой в точке
280

Кривые циклоидальные 299

Круг производящий 299

Кручение кривой в точке 282

Лемниската Бернулли 300

Линия винтовая 255

– цепная 266

Лист декартов 241

Локализация (отделение) корня 349

Локсодромия 307

Максимум функции абсолютный (глобальный) на отрезке 219

– – локальный 197

Матрица III, 41

– невырожденная III, 324

– симметрическая III, 366

– треугольная нижняя III, 319

– трехдиагональная III, 344

Метод бисекции 370

– касательных 382

– линейного интерполирования
I-348, 370

– многошаговый 370

– Ньютона (касательных) 382

– – упрощенный 386

– одношаговый 370

- Метод прогонки III, 344
- пропорциональных частей I-348, 370
 - простой итерации 375
 - Рунге 335
 - секущих 386
 - хорд I-348, 370
 - Чебышева 391
 - k -шаговый 370
- Минимум функции абсолютный (глобальный) на отрезке 219
- локальный 197
- Минор III, 314
- Многочлен I-132, 82
- интерполяционный 313
 - Лагранжа 315
 - Ньютона 320
 - с кратными узлами 324
 - Эрмита 324
 - кубический 327
 - Тейлора 160
 - характеристический IV, 366
- Многочлены взаимно простые 351
- Чебышева 338
- Модель математическая 310
- Н**аклон сплайна 342
- Начало координат I-77, III, 136
- Неопределенность I-240, 131
- Неравенство треугольника I-152, I-177, 138
- Нормаль 22
- главная 281
 - к кривой в точке 264
- Ноль многочлена I-159, 313
- m -кратный 351
- О**браз множества (подмножества) при отображении I-70, 310
- Образ элемента при отображении I-70, 348
 - Обусловленность 374
 - Овалы Кассини 300
 - Операция линейная III, 39
 - Определитель III, 41
 - Вандермонда (степенной) III, 314
 - Ось абсцисс III, 98
 - координат III, 100
 - полярная III, 259
 - Отделение (локализация) корня 349
 - Отношение разностное 17
 - Отображение (функция) I-70, 310
 - обратное I-75, 348
 - Отрезок, вложенный в отрезок I-47, 369
 - касательной (подкасательной) 22
 - полярной 261
 - локализации корня 349
 - нормали (поднормали) 22
 - полярной 261
- П**арабола I-107, 98
- Параметр I-115, 51
- кривой 249
 - натуральный 255
- Переменные выравнивающие 318
- Плоскость координатная III, 49
- нормальная 282
 - соприкасающаяся 282
 - спрямляющая 282
- Полос III, 259
- Порядок алгебраической кривой 262
- малости бесконечно малой функции I-358, 330
 - сходимости метода 370
- Последовательность возрастающая (убывающая) I-218, 378

- Последовательность итерационная
 I-100, 370
- монотонная (строго монотонная)
 I-218 170, 378
 - ограниченная I-219, 170
- Правило Бернулли — Лопитала 132
- Гарвика 374
 - дифференцирования сложной
 функции 44
 - Крамера III, 314
 - цепное 44
 - Штурма 367
- Предел бесконечный I-257, 19
- вектор-функции 244
- Представление кривой векторное
 249
- координатное 250
- Приближение функции
 квадратичное 158
- линейное 156
 - чебышевское 341
- Принцип минимакса 341
- Проекция вектора на ось III, 100
- Произведение векторов векторное
 III, 246
- скалярное III, 246
 - смешанное III, 285
- Производная бесконечная 19
- определенного знака 27
 - вектор-функции в точке 246
 - – – – вторая 248
 - конечная 19
 - односторонняя 26
 - бесконечная (конечная) 27
 - слева (справа) 26
 - функции в точке 19
 - – – – вторая (второго порядка) 78
 - – – – первая (первого порядка) 78
 - логарифмическая 47
- Производная n -го порядка 78
- Прообраз множества
 (подмножества) при
 отображении I-70, 310
- элемента при отображении I-70,
 348
- Псевдосфера 271
- Р**адиус-вектор 244
- Радиус кривизны плоской кривой в
 точке 263
- – пространственной кривой в
 точке 280
 - полярный I-151, III, 259
- Развертка 274
- Разложение вектора в базисе III,
 244
- определителя III, 41
- Разность конечная 320
- – правая и левая (вперед и назад)
 330
 - – центральная 332
 - разделенная 320
- Резольвента кубическая 358
- Репер кривой сопутствующий 282
- С**екущая 18
- (кривой) 251
- Система координат декартова
 прямоугольная III, 244
- – полярная III, 259
 - линейных алгебраических
 уравнений (СЛАУ) III, 319
 - – – – однородная III, 324
- Скорость сходимости квадратичная
 371
- – кубическая 371
 - – линейная (сверхлинейная) 370
- Соотношение рекуррентное I-87, 90

- Сочетание I-84, 83
- Спираль логарифмическая 272
- синусоидальная 299
- Сплайн (сплайн-функция) 341
- интерполяционный 342
 - кубический 342
 - естественный 345
 - фундаментальный 344
 - линейный 342
- Степень многочлена I-132, 82, 313
- Сфера соприкасающаяся 307
- Схема (алгоритм) Горнера I-158, 321
- Эйткена 322
- Сходимость метода 370
- локальная 384
- Т**абулирование функций 309
- Теорема алгебры основная I-159, 313
- Точка асимптотическая 272
- возврата (заострения) графика 215
 - излома графика 27
 - касания 252
 - кривой изолированная 296
 - конечная (начальная) 251
 - кратная 251
 - неособая (обыкновенная) 251
 - особая 251
 - критическая функции 201
 - максимума функции 199
 - локального 198
 - строгого 198
 - минимума функции 199
 - локального 198
 - строгого 198
 - перегиба графика функции 213
 - функции 213
- Точка распрямления кривой 284
- самопересечения (узловая) графика 240
 - стационарная функции 200
 - угловая графика 27
 - уплощения кривой 284
 - экстремума функции 199
 - локального 198
 - строгого 198
- Траектория 250
- Трактриса 269
- Треугольник подвижный 282
- Трехчлен квадратный I-132, 313
- Триэдр основной 282
- Тройка некопланарных векторов правая III, 282
- Трохоида 299
- У**гол полярный I-151, III, 259
- смежности дуги 263
- Узел интерполяции 312
- кратный 324
- Улитка Паскаля 298
- Уравнение алгебраическое 350
- четвертой степени 357
 - биквадратное 358
 - дифференциальное обыкновенное второго порядка VIII, 87
 - первого порядка VIII, 45
 - квадратное 354
 - кубическое 354
 - неполное 355
 - нелинейное 348
 - прямой с угловым коэффициентом III, 22
- Уравнения кривой натуральные 285
- параметрические 51

Условие существования точки
перегиба достаточное 216

---- необходимое 215

Формула Кардано 355

– конечных приращений 114

– Коши конечных приращений 119

– Лагранжа 114

– Лейбница 89

– Маклорена 171

– Тейлора 160

– в дифференциалах 164

– с остаточным членом в форме
Лагранжа 168

----- Пеано 164

Формулы Серре — Френе 283

Функции координатные

вектор-функции 244

– тригонометрические обратные
I-129, 49

Функция векторная скалярного
аргумента 244

– выпуклая (строго) вверх (вниз) в
интервале 207

– действительная действительного
переменного I-71, I-106, 244

-- (скалярная) I-71, 244

– действительного переменного
I-71, 5

– дифференцируемая 33

-- в интервале 33

--- промежутке непрерывно n раз
80

--- точке 30

---- непрерывно n раз 79

-- на множестве 33

– дробно-рациональная I-133, 143

– линеаризованная в окрестности
точки 68

Функция линеаризованная

относительно точки 68

– линейная I-132, 97

– невяная 55

– общего вида I-124, 227

– показательно-степенная I-344, 46

Центр кривизны плоской кривой в
точке 264

-- пространственной кривой в
точке 281

Циклоида 299

Циссоида Диоклеса 292

Число действительное I-44, 351

– комплексное I-149, 351

– обусловленности абсолютное 374

Член остаточный в общей форме
167

--- форме Коши 168

---- Лагранжа 167

---- Пеано 164

-- формулы Тейлора 160

Шаг винтовой линии 256

Эвольвента (инволюта) 274

Эволюта 274

Экстраполяция 310

– линейная (двухточечная) 312

Экстремум функции абсолютный
(глобальный) 219

-- гладкий 201

-- локальный 198

-- острый 201

Элемент матрицы III, 41

Эпитрохоида 299

Эпициклоида 299

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Основные обозначения	9
1. Производная функции	13
1.1. Вводные замечания	13
1.2. Разностное отношение	15
1.3. Понятие производной	19
1.4. Механический и геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к плоской кривой	21
1.5. Производные основных элементарных функций	23
1.6. Односторонние конечные и бесконечные производные	26
1.7. Дифференцируемость функции. Непрерывность дифференцируемой функции	30
Вопросы и задачи	33
2. Правила дифференцирования функций	36
2.1. Дифференцирование и арифметические операции	36
2.2. Производная сложной функции	42
2.3. Производная обратной функции	48
2.4. Производная функции, заданной параметрически	51
2.5. Дифференцирование неявных функций	55
2.6. Основные правила и формулы дифференцирования функций	57
Вопросы и задачи	59
3. Дифференциал	63
3.1. Определение дифференциала и его геометрический смысл	63
3.2. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы записи дифференциала	66
3.3. Использование дифференциала в приближенных вычислениях	68
Д.3.1. Оценка погрешности приближенных вычислений	69
Вопросы и задачи	76

4. Производные и дифференциалы высших порядков	78
4.1. Производные высших порядков	78
4.2. Примеры механической и физической интерпретаций производной второго порядка	84
4.3. Формула Лейбница	88
4.4. Производные высших порядков параметрически и не- явно заданных функций	91
4.5. Дифференциалы высших порядков	95
Д.4.1. Геометрическое и механическое толкование дифферен- циала второго порядка	97
Вопросы и задачи	102
5. Основные теоремы дифференциального исчисления	106
5.1. Теоремы о нулях производных	106
5.2. Теорема Лагранжа и формула конечных приращений	112
5.3. Теорема Коши	117
Д.5.1. О непрерывности производных	123
Вопросы и задачи	128
6. Раскрытие неопределенностей	131
6.1. Раскрытие неопределенности вида $[0/0]$	131
6.2. Неопределенность вида $[\infty/\infty]$	137
6.3. Особенности применения правила Бернулли — Лопи- таля	142
6.4. Другие виды неопределенностей	146
Вопросы и задачи	154
7. Формула Тейлора	156
7.1. Линейное и квадратичное приближения функции . .	156
7.2. Многочлен Тейлора и формула Тейлора	159
7.3. Различные представления остаточного члена формулы Тейлора	164
7.4. Формула Маклорена	170
7.5. Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора	180
Д.7.1. Использование формулы Тейлора в приближенных вы- числениях	183
Д.7.2. Обобщенная теорема о среднем значении	186
Вопросы и задачи	188

8. Исследование функций	192
8.1. Условия возрастания и убывания функций	192
8.2. Экстремум функции. Необходимые условия существования экстремума	197
8.3. Достаточные условия существования экстремума функции	201
8.4. Условия выпуклости функции	207
8.5. Точки перегиба	213
8.6. Наибольшее и наименьшее значения функции в промежутке	218
8.7. Асимптоты графика функции	222
8.8. Общая схема исследования функции и построение ее графика	226
Д.8.1. Особенности исследования функций, заданных параметрически	231
Вопросы и задачи	241
9. Геометрические приложения дифференциального исчисления	244
9.1. Векторная функция скалярного аргумента	244
9.2. Понятие кривой	249
9.3. Плоские кривые	257
9.4. Кривизна плоской кривой	262
9.5. Эволюта и эвольвента плоской кривой	274
Д.9.1. Кривизна и кручение пространственной кривой	280
Д.9.2. Примеры плоских кривых	288
Вопросы и задачи	305
10. Интерполирование и численное дифференцирование	309
10.1. Табличный способ задания функции	309
10.2. Линейная интерполяция	311
10.3. Квадратичная интерполяция	313
10.4. Интерполяционный многочлен Лагранжа	315
10.5. Интерполяционный многочлен Ньютона	319
10.6. Интерполирование с кратными узлами	323
10.7. Численное дифференцирование	328
Д.10.1. Минимизация погрешности интерполяции	337
Д.10.2. Интерполирование сплайнами	341
Вопросы и задачи	346

11. Решение нелинейных уравнений	348
11.1. Постановка задачи	348
11.2. Нули многочленов	350
11.3. Точные решения алгебраических уравнений	353
11.4. Отделение корней алгебраических уравнений	360
11.5. Численные методы уточнения значения корня	369
11.6. Метод простой итерации	374
11.7. Метод Ньютона	382
11.8. Комбинированные методы	386
Д.11.1. Метод Чебышева	390
Вопросы и задачи	393
Список рекомендуемой литературы	395
Предметный указатель	398

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск II**

Иванова Елена Евгеньевна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Редактор *Г.А. Нилова*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
под руководством *А.Н. Канатникова*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.005683.09.04 от 13.06.2004 г.

Подписано в печать 20.06.2006. Формат 60×88 1/16.

Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 24,92.
Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с оригинал-макета
в ГУП ППП «Типография «Наука».
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-7038-2885-6



9 785703 828854